В·С·КУЩЕНКО

# СБОРНИК КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

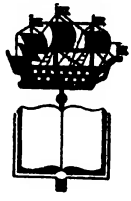
## С РЕШЕНИЯМИ

В. С. КУЩЕНКО

# СБОРНИК КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

## С РЕШЕНИЯМИ

*издание пятое*



ИЗДАТЕЛЬСТВО „СУДОСТРОЕНИЕ“
Ленинград
1969

В книге собраны наиболее интересные конкурсные задачи по алгебре, геометрии и тригонометрии, предлагавшиеся при испытаниях на аттестат зрелости в средних школах и на вступительных экзаменах в высших учебных заведениях с 1873 по 1966 г. Задачи расположены по разделам в порядке возрастающей трудности. Ряд решений снабжен методическими указаниями.

Сборник предназначен для молодежи, занимающейся самообразованием и готовящейся к поступлению в высшие учебные заведения, а также может быть использован преподавателями математики средних учебных заведений и руководителями математических кружков.

Стр. 512, рис. 114, библиография 11 наименований.

3—18—5

# СОДЕРЖАНИЕ


Предисловие к первому изданию . . . . . 5
Предисловие к пятому изданию . . . . . 6

Часть I. **Алгебра**

| | Задачи | Ответы и решения |
|---|---|---|
| § 1. Задачи на составление уравнений . . . . . | 7 | 175 |
| § 2. Преобразование алгебраических выражений . . . | 16 | 191 |
| § 3. Уравнения и системы уравнений первой степени | 25 | 204 |
| § 4. Квадратные уравнения. Уравнения высших степеней . . . . . | 29 | 205 |
| § 5. Иррациональные уравнения . . . . . | 36 | 225 |
| § 6. Системы уравнений высших степеней . . . . . | 39 | 233 |
| § 7. Комплексные числа . . . . . | 45 | 250 |
| § 8. Неравенства . . . . . | 48 | 251 |
| § 9. Прогрессии . . . . . | 52 | 259 |
| § 10. Показательные и логарифмические уравнения: | | |
| а) Основные свойства логарифмов . . . . . | 63 | 294 |
| б) Показательные уравнения . . . . . | 66 | 299 |
| в) Логарифмические уравнения . . . . . | 68 | 305 |
| г) Системы уравнений . . . . . | 71 | 315 |
| § 11. Соединения и бином Ньютона . . . . . | 74 | 325 |
| § 12. Разные задачи и примеры . . . . . | 79 | 332 |

Часть II. **Геометрия**

| | | |
|---|---|---|
| § 13. Задачи по планиметрии . . . . . | 84 | 335 |
| § 14. Задачи по стереометрии . . . . . | 92 | 364 |

Часть III. **Тригонометрия**

| | | |
|---|---|---|
| § 15. Тождественные преобразования тригонометрических выражений . . . . . | 99 | 388 |
| § 16. Приведение тригонометрических выражений к логарифмическому виду . . . . . | 108 | 403 |
| § 17. Обратные тригонометрические функции . . . . . | 110 | 410 |
| § 18. Тригонометрические уравнения . . . . . | 112 | 411 |
| § 19. Задачи по планиметрии с применением тригонометрии . . . . . | 118 | 445 |
| § 20. Задачи по стереометрии с применением тригонометрии . . . . . | 122 | 456 |
| § 21. Разные задачи и примеры . . . . . | 130 | 483 |

## Часть IV. Экзаменационные билеты и письменные работы, задачи и вопросы


| | Задачи | Ответы и решения |
|---|---|---|
| § 22. Задачи, теоремы и вопросы, предлагавшиеся на устных экзаменах: | | 490 |
| а) Арифметика и алгебра | 133 | — |
| б) Геометрия | 137 | — |
| в) Тригонометрия | 139 | — |
| § 23. Типичные варианты письменных работ | 141 | — |
| § 24. Образцы экзаменационных билетов | 155 | — |


## Часть V. Задачи математических олимпиад


| | | |
|---|---|---|
| § 25. Задачи для учащихся 6—7-х классов (II тур) | 160 | — |
| § 26. Задачи для учащихся 8—9-х классов (II тур) | 161 | — |
| § 27. Задачи для учащихся 10—11-х классов (II тур) | 165 | — |
| § 28. Задачи для учащихся 6—11-х классов (III тур) | 167 | — |
| Приложение. Основные формулы для справок: | | |
| Алгебра | 492 | — |
| Геометрия | 495 | — |
| Прямолинейная тригонометрия | 502 | — |
| Литература | 510 | — |
| Список учебных заведений, в которых предлагались задачи, помещенные в сборнике | 510 | — |

# Предисловие к первому изданию

Предлагаемая книга предназначена для поступающих в высшие учебные заведения (заочные и очные) непосредственно с производства и из колхозов, а также для занимающихся самообразованием. Ее могут использовать учащиеся средних школ и техникумов, преподаватели средних учебных заведений, руководители математических кружков.

В книге собраны задачи, предлагавшиеся с 1873 по 1958 г. при испытаниях на аттестат зрелости, а также на конкурсных экзаменах в различных вузах. Для ознакомления поступающих с требованиями, предъявляемыми на вступительных экзаменах, даны образцы экзаменационных билетов и некоторые варианты письменных работ по математике.

Кроме задач, предлагавшихся на экзаменах, использованы материалы ряда математических руководств, журналов и математических олимпиад.

Примеры и задачи, собранные в книге, являются типичными и охватывают основные вопросы элементарной математики. Решение этих задач даст возможность учащемуся повторить курс и подготовиться к экзамену и учебе в вузе. Для большинства задач дано одно схематичное решение; читатель должен попытаться решать задачи по-иному, может быть, оригинальнее и изящнее. Для самостоятельных упражнений помещены задачи без решения.

После условия задачи в скобках указаны номер, по которому можно установить соответствующее учебное заведение и год, когда задача была предложена. Нумерованный список учебных заведений, в которых предлагались задачи, приведенные в книге, помещен на стр. 511—512.

Составитель выражает благодарность проф. *И. Я. Депману* и *В. К. Голованову* за ценные советы при составлении книги. Критические замечания и пожелания читателей будут приняты с благодарностью.

## Предисловие к пятому изданию

Пятое издание книги почти не отличается от четвертого: сделано несколько исправлений мелких ошибок, допущенных в предыдущих изданиях.

Выражаю глубокую признательность всем читателям, приславшим свои замечания, и особо отмечаю следующих товарищей: Щеглова Н. (Кишинев), Панкратова И. (Полтава), Гетманова В., Хомякова В. (Новосибирск), Козина А. (Киров), Борика М. (Клин), Смирнова В. (Москва), Гридасова В. (Воронеж), Бобрицкого К. (Краснодар), Руфова И. (Вилюйск). Буду признателен читателям, которые сообщат критические замечания и пожелания по пятому изданию.

Отзывы направлять по адресу: Ленинград, Д-65, ул. Гоголя, 8, издательство «Судостроение».

*В. КУЩЕНКО*

# задачи

Часть I

## АЛГЕБРА

### § 1. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

1. Для нумерации страниц энциклопедического словаря потребовалось 6869 цифр. Сколько страниц в словаре?.

(40, 1962, 1964, 1965, 1966)

2. Косцы должны выкосить два луга. Начав с утра косить большой луг, они после полудня разделились: половина косцов осталась на первом лугу и к вечеру его докосила, а остальные перешли косить на второй луг, площадью вдвое меньше первого. Сколько было косцов, если известно, что в течение следующего дня оставшуюся часть работы выполнил один косец (задача Л. Н. Толстого)?

(40, 1940, 1956, 1962, 1966)

3. На вопрос, сколько сыну лет, отец ответил: если его удвоенный теперешний возраст уменьшить на утроенный возраст, который он имел шесть лет назад, то получится его возраст в данное время.

(40, 1961, 1965)

4. Возраст некоего гражданина в 1887 г. был равен сумме цифр года его рождения. Сколько ему было лет?

(40, 1960)

5. Сколькими нулями оканчивается число, полученное от умножения всех чисел натурального ряда от 1 до 100?

(39, 1951, 1953, 1957, 1965)

6. Найти все трехзначные числа, если при делении каждого из них на 11 получается частное, равное сумме квадратов значений отдельных цифр данного числа.

(39, 1965)

7. Из числа 123456789101112. . .9899100 вычеркнуть 100 цифр так, чтобы полученное после этого число было возможно бо́льшим.

(40, 1961; 39, 1964, 1965, 1966)

**8.** Доказать, что при делении двух целых чисел на их разность получаются равные остатки, а частные отличаются на единицу.

(40, 1961)

**9.** Найти два положительных числа, произведение которых, сложенное с каждым из данных чисел, составит куб некоторого числа (задача Диофанта).

(40, 1962, 1966)

**10.** Найти наименьшее число, записываемое одними единицами, которое делилось бы на 333. . .3 (сто троек).

(40, 1962)

**11.** Найти три положительных числа, которые образуют непрерывную пропорцию и по величине одинаково превышают заданные числа $a$, $b$ и $c$. Исследовать решение.

(12, 1961)

**12.** Найти три (неравных между собою) целых положительных числа, чтобы суммы всех трех и каждых двух были квадратами (задача Диофанта).

**13.** Доказать, что если разбить ряд последовательных нечетных чисел, начиная с единицы, на группы так, что число членов в каждой будет возрастать как ряд натуральных чисел, то сумма членов каждой группы будет равна кубу числа членов (задача Никомаха).

**14.** Найти два числа, сумма, разность и произведение которых находятся в отношении 5 : 1 : 18.

(39, 1958)

**15.** Найти два таких целых положительных числа, разность квадратов которых равна 133.

(39, 1954, 1964)

**16.** Двузначное число втрое больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы равен утроенному искомому числу. Найти это число.

(40, 1961)

**17.** Найти четыре члена геометрической пропорции по известной сумме $2S$ крайних, сумме $2S_1$ средних и сумме их квадратов, равной $4c^2$.

(40, 1960)

**18.** Имеется $4n$ положительных чисел таких, что из четырех любых чисел, попарно различных, можно составить геометрическую пропорцию.

Доказать, что среди этих чисел найдется $n$ одинаковых.

(39, 1950; 40, 1960)

**19.** Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?

(39, 1958, 1960, 1964)

**20.** Узнать, через сколько минут после того, как часы показывали 9 часов, минутная стрелка догонит часовую?

(39, 1950, 1952, 1955)

**21.** Собака, находясь в точке $A$, погналась за лисицей, которая была на расстоянии 30 *м* от собаки в точке $B$. Скачок собаки равен 2 *м*, скачок лисицы — 1 *м*. Собака делает два скачка в то время, когда лисица делает три скачка. На каком расстоянии от точки $A$ собака догонит лисицу?

(39, 1951, 1953, 1956)

**22.** Книжный магазин платит издательству 90% цены, обозначенной на обложке книги, а продает книгу по этой цене. Сколько процентов составляет наценка магазина?

(39, 1955)

**23.** Ученик прочел книгу в 480 стр., ежедневно читая одинаковое количество страниц. Если бы он читал каждый день на 16 стр. больше, то прочел бы книгу на 5 дней раньше.Сколько дней ученик читал книгу?

(43, 1960)

**24.** Колхозник, идущий из деревни на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 *км*, рассчитал, что если он будет двигаться с той же скоростью, то опоздает к поезду на 40 мин. Поэтому остальной путь он проходил со скоростью 4 *км* в час и пришел на станцию за 45 мин. до отхода поезда. Найти расстояние от деревни до станции.

(39, 1950, 1952)

**25.** Рыбак, гребя все время с одинаковой силой, проплыл от пристани против течения число километров, равное положительному корню уравнения

$$\sqrt{5x} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{3x+1},$$

и возвратился назад на пристань через 1 час 6 мин. 40 сек. Найти скорость движения лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2,4 *км* в час.

(41, 1958)

**26.** Одна труба наполняет бассейн на 2 часа, а другая на 4,5 часа дольше, чем наполняют этот бассейн обе трубы, открытые одновременно. За сколько часов может наполнить бассейн каждая труба в отдельности?

(38, 1950; Болгария)

**27.** Из Ленинграда в Москву вышел товарный поезд. Через полтора часа вслед за ним вышел пассажирский поезд, скорость которого на 5 *км* в час больше скорости товарного поезда. Через 15 час. после выхода пассажирский поезд не только обогнал товарный, но был впереди на 21 *км*. Определить скорость товарного поезда.

(42, 1959)

**28.** Два туриста P и M одновременно отправляются из пункта A в пункт B. Турист P пошел пешком, а турист M выехал на мотоцикле с водителем N. Проехав часть пути, M пошел дальше пешком, а водитель N возвратился назад, взял туриста P, и оба туриста (M — пешком, а P — на мотоцикле) прибыли одновременно в пункт B.

Расстояние между пунктами равно $s$ километров, скорости пешеходов равны $v_1$ *км/час*, а скорость мотоцикла — $v_2$ *км/час*. Вычислить время, затраченное туристами на передвижение из пункта A в пункт B.

(40, 1961, 1965)

**29.** Двое рабочих заняты на одной и той же работе. Сначала один проработал треть того времени, которое требуется второму для выполнения всей работы, потом второй проработал треть того времени, которое потратил бы первый на выполнение всей работы. После этого оказалось, что выполнено $\frac{13}{18}$ всей работы. Вычислить, сколько времени потребовалось бы для выполнения работы каждому рабочему в отдельности, если вместе они могут выполнить ее за $3\frac{3}{5}$ часа.

(39, 1958)

**30.** Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1 : 2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2 : 3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

(39, 1958; 42, 1959; 41, 1963)

**31.** При испытании на экономичность двух двигателей внутреннего сгорания одинаковой мощности было установлено, что один израсходовал 600 *г* бензина, а второй, работавший на 2 часа меньше, израсходовал 384 *г*. Если бы первый двигатель расходовал в час столько бензина, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то за то же время работы расход бензина в обоих двигателях был бы одинаковым. Сколько бензина в час расходует каждый двигатель?

(42, 1959)

**32.** Имеется несколько одинаковых шаров. Их можно уложить в виде квадрата или в виде правильного треугольника. Найти число этих шаров, если известно, что при треугольном их расположении в стороне треугольника будет на два шара больше, чем в стороне квадрата при квадратном их расположении. Предполагается, что шары располагаются не только по контуру квадрата (треугольника), но заполняют и внутреннюю часть квадрата (треугольника).

(2, 1958; 42, 1959)

**33.** Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми $s$ километров, и через час встречаются. Не останавливаясь, они продолжают путь с той же скоростью, и первый прибывает в пункт B на $t$ часов раньше, чем второй в пункт A. Определить скорость каждого велосипедиста.

(37, 1946; 50, 1963)

**34.** Двое отправились одновременно из села на станцию железной дороги: один шел по шоссе со скоростью $v$ километров в час, другой — ближайшим путем, по тропинке, со скоростью 4 *км* в час и пришел на станцию на 1 час раньше первого. Определить расстояние от села до станции по тропинке, если путь по шоссе на 6 *км* длиннее.

Исследовать, при каких целых значениях $v$ задача имеет определенное решение.

(37, 1943)

**35.** Два автобуса отправились одновременно из одного села в другое; расстояние между селами 36 *км*. Первый автобус прибыл в назначенный пункт на 15 мин. раньше второго, скорость которого была меньше скорости первого автобуса на 2 *км* в час.

Вычислить скорость каждого автобуса.

(38, 1949; Болгария)

**36.** Два сплава золота и меди 950-й пробы и 800-й пробы сплавляют с двумя килограммами чистого золота. Получают новый сплав 906-й пробы весом 25 *кг*. Вычислить вес первых двух сплавов.

(12, 1954)

**37.** Вычислить вес и пробу сплава серебра с медью, зная, что, сплавив его с 3 *кг* чистого серебра, получат сплав 900-й пробы, а сплавив его с 2 *кг* сплава 900-й пробы, получат сплав 840-й пробы.

(12, 1952)

**38.** Некоторая сумма денег находилась в сберегательной кассе по 2% годовых (проценты простые). Через некоторое время эта сумма была взята вместе с полученными на нее процентными деньгами, что составило 8502 руб. Если бы эта же сумма была отдана по 3% годовых, но сроком на 1 год меньше, то процентные деньги с нее составили бы 819 руб. Какова была сумма денег, положенная в сберкассу, и сколько времени она там находилась?

(12, 1950)

**39.** Два каменщика, из которых второй начинает работать на $1\frac{1}{2}$ дня позже первого, могут выстроить стену в 7 дней. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно, то для ее завершения первому потребовалось бы на 3 дня больше, чем второму. Во сколько дней каждый из них выстроит стену?

(37, 1876; 26, 1949)

**40.** Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 часа. Во сколько времени пройдет все расстояние каждый, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на $2\frac{1}{2}$ часа позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый.

(37, 1936)

**41.** Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через $t$ часов. Во сколько времени прошел расстояние между A и B каждый, если первый, вышедший из A, пришел в B на $k$ часов позднее, чем второй пришел в A.

(30, 1958)

**42.** Совхозом было заготовлено на зиму $a$ тонн кормов для скота. Но $b$ голов скота отправили в соседнюю область, и, вследствие этого,

норма кормов на голову скота увеличилась на $c$ тонн. Сколько тонн кормов предполагалось расходовать на голову скота первоначально?

(37, 1946)

**43.** Выгрузка $a$ тонн зерна была поручена нескольким рабочим. Так как на работу явилось на $b$ рабочих больше, то каждому пришлось выгрузить на $c$ тонн меньше. Сколько рабочих работало на выгрузке зерна?

(30, 1958)

**44.** Расстояние между двумя городами $s$ километров. Курьерский поезд, скорость которого на $a$ километров в час больше скорости пассажирского поезда, проходит это расстояние на $t$ часов скорее.

Во сколько часов курьерский поезд проходит расстояние между городами?

(37, 1946)

**45.** Поезд был задержан на станции на $t$ минут. Чтобы наверстать потерянное время, он увеличил скорость на $a$ километров в час и на следующем перегоне длиной $b$ километров опоздание ликвидировал. Какова была скорость поезда до задержки на станции?

(37, 1946, 1947; 20, 1960)

**46.** Расстояние между пунктами A и B равно $s$ километров, причем $^2/_3$ этого расстояния — асфальтированное шоссе. Скорость автомашины на асфальтированном шоссе на $v$ километров в час больше скорости, с которой она проходит остальную часть пути — грунтовую дорогу. Определить скорость автомашины на асфальтированном шоссе и на грунтовой дороге, если все расстояние AB автомашина проходит за $t$ часов.

(37, 1948; 50, 1963)

**47.** Колонна войск протяжением $d$ километров движется по шоссе маршем со скоростью $v$ километров в час. Конный вестовой выезжает из конца колонны в ее начало, передает приказание и тотчас же отправляется обратно. На проезд туда и обратно вестовой тратит $t$ минут.

Определить скорость вестового, если она на всем пути была одинакова.

(37, 1949)

**48.** Дирижабль прошел расстояние 40 *км* против ветра (скорость ветра 30 *км/час*); затем прошел тот же путь в обратном направлении, затратив в оба конца 2,5 часа. Определить скорость дирижабля в покоящемся воздухе.

(37, 1913)

**49.** Из города A в город B выехал мотоциклист, а из B в A, навстречу ему, выехал велосипедист. При встрече оказалось, что велосипедист проехал $a$ километров, а мотоциклист на $d$ километров больше. После встречи они продолжали путь и велосипедист приехал в A через $t$ часов после того, как мотоциклист приехал в B. Определить скорости велосипедиста и мотоциклиста, если мотоциклист проезжает на $b$ километров в час больше велосипедиста.

(37, 1949; 50, 1963)

**50.** Две суммы составляют 10 000 руб. Процентная такса для каждой суммы равна $\frac{1}{1000}$, а общая сумма годового дохода составляет 580 руб. Как велика каждая сумма в отдельности?

(12, 1955)

**51.** Два раствора, из которых первый содержит 0,8 *кг*, а второй 0,6 *кг* безводной серной кислоты, соединили вместе и получили 10 *кг* нового раствора серной кислоты. Вычислить вес первого и второго растворов в смеси, если известно, что безводной серной кислоты содержится в первом растворе на 10% больше.

(26, 1938; 12, 1951)

**52.** Прирост продукции на заводе по сравнению с предыдущим годом составил за первый год $a\%$, за второй год — $b\%$. Какой должен быть процент прироста продукции за третий год, чтобы средний годовой прирост продукции за три года был равен $c\%$.

(1, 1946; 12, 1952)

**53.** Мяч, ударяясь о землю, отскакивает и поднимается на $\frac{2}{3}$ высоты, с которой падал. Если в первый раз он упал с высоты 8,1 *м*, то после скольких отскакиваний он поднимется на 1,6 *м*?

(12, 1950)

**54.** Население страны ежегодно увеличивается на $\frac{1}{80}$. Через сколько лет население этой страны удвоится?

(12, 1952)

**55.** Разность двух чисел равна 48; разность между средним арифметическим и средним геометрическим этих чисел равна 18. Найти эти числа.

(31, 1936)

**56.** В кинозале имеется $n$ стульев, расположенных рядами с одинаковым числом стульев. Если в каждом ряду добавить по $p$ стульев, а число рядов уменьшить на $m$, то общее число мест в кинозале останется прежним. Сколько рядов стульев в кинозале и сколько стульев в каждом ряду?

(37, 1946; 50, 1963)

**57.** На участке трамвайного пути длиной 1 *км* пешеход, проходящий этот участок за 12 мин., ежедневно подсчитывал число трамваев, обгоняющих его и идущих навстречу. В течение месяца первых оказалось 45, вторых — 120. Определить скорость трамвая.

(36, 1947)

**58.** На горизонтальное дно цилиндрического сосуда, содержащего воду, помещается шар радиуса $R$; поверхность жидкости становится касательной к шару. То же самое происходит и в том случае, если

вместо шара радиуса $R$ поместить на дно цилиндра шар радиуса $mR$. Вычислить радиус основания цилиндра.

Исследовать, при каких значениях $m$ задача имеет решение.

(40, 1950)

59. Гражданин С из своего срочного вклада (3%) в сберегательной кассе тратит в конце каждого года по 90 руб. из каждой тысячи. Через сколько времени он истратит вклад?

(40, 1953)

60. В сосуде А имеется $x$ литров некоторой жидкости, а в сосуде В такое же количество воды. Двумя кружками, емкостью 0,5 *л* каждая, одновременно набирают из сосудов содержимое и переливают из сосуда А в сосуд В и из сосуда В в сосуд А. Затем эту операцию повторяют. Определить $x$, если известно, что крепость раствора в сосуде А после двух переливаний равна 90,5%.

(13, 1958)

61. В бассейн проведены две трубы; если вода будет течь через одну вторую трубу, то бассейн наполнится на 3 часа быстрее, чем если бы вода текла только через одну первую трубу. Вода втекала в течение $5\frac{3}{4}$ часа через первую трубу, затем открыли вторую, и через 10 час. бассейн наполнился. Во сколько часов наполняет бассейн каждая труба?

(37, 1878)

62. Слиток из олова и свинца весом 20 *кг* при погружении в воду потерял 2 *кг*. Известно, что 10 *кг* олова теряет в воде $1\frac{3}{8}$ *кг*, а 5 *кг* свинца теряет $\frac{3}{8}$ *кг*. Сколько олова и свинца в слитке?

(37, 1875; 40, 1965)

63. Составлен сплав из 2 *кг* меди, 3,7 *кг* свинца и 1,2 *кг* цинка. Как велик будет удельный вес сплава, если известно, что удельный вес меди, свинца и цинка соответственно равен 8,9; 11,4 и 7.

(37, 1873)

64. В течение 7 час. 20 мин. судно прошло вверх по реке 35 *км* и вернулось обратно. Скорость течения равна 4 *км* в час. С какой скоростью судно шло по течению и против течения?

(37, 1936)

65. В книге на одной из страниц стро́ки содержат одинаковое число букв. Если увеличить на 2 число строк на странице и число букв в каждой строке, то число букв на странице увеличится на 150. Если же убавить число букв в строке на 3, а число строк на странице на 5, то число всех букв на странице уменьшится на 280. Найти число строк на странице и число букв в строке.

(37, 1936)

**66.** У одного ученика было денег на 3 руб. больше, чем у другого. Первый внес на покупку книг $\frac{1}{n}$ часть своих денег, а второй $\frac{1}{3}$ часть своих денег. Сколько денег было у второго ученика, если известно, что первый внес на 2 руб. больше. Исследовать, при каких целых значениях $n$ задача имеет определенное решение.

(37, 1943)

**67.** Найти два таких числа, чтобы их сумма, произведение и разность квадратов были равны.

(37, 1877)

**68.** Четыре числа составляют геометрическую пропорцию, в которой сумма крайних членов равняется $a$, а сумма средних членов равняется $b$. Сумма квадратов всех четырех членов равняется $c^2$. Определить первый член этой пропорции.

(37, 1879)

**69.** Несколько лет назад в лесу было 10 000 деревьев, а теперь в нем 15 600 деревьев. За сколько лет произошло это увеличение, если число деревьев ежегодно увеличивалось на $\frac{1}{10}$.

(37, 1875)

**70.** За $n$ часов трактор вспахивает на $p$ гектаров больше, чем лошадь. Сколько гектаров вспашет за $n$ часов лошадь и сколько гектаров вспашет за это же время трактор, если трактор вспахивает 1 *га* на $t$ часов быстрее.

(37, 1946)

**71.** Расстояние между А и В по железной дороге 66 *км*, а по водному пути 80,5 *км*. Из А поезд выходит на 4 часа позже парохода и прибывает в В на 15 мин. раньше. Определить среднюю скорость поезда и парохода, если первая больше второй на 30 *км/час*.

(2, 1958)

**72.** Два пешехода вышли навстречу друг другу из пунктов А и В и встретились через $t$ часов. Во сколько времени прошел каждый из них расстояние между А и В, если первый, вышедший из А, пришел в пункт В на $b$ часов позже, чем второй пришел в пункт А.

(2, 1958)

**73.** Одна мастерская должна была изготовить 420 деталей, другая, за тот же срок, 500 деталей. Первая выполнила свою работу на 4 дня раньше срока, а вторая на 7 дней. По скольку деталей в день изготовляла каждая мастерская, если вторая мастерская ежедневно изготовляла на 5 деталей больше.

(15, 1957)

**74.** Водоем может быть опорожнен через три трубы. При совместном действии первой и второй труб водоем опорожняется за 2 часа,

через первую и третью — за 72 мин., а через вторую и третью — за $1\frac{1}{2}$ часа. За сколько часов опорожнит водоем каждая труба?

(15, 1958)

**75.** Из пунктов А и В, расстояние между которыми равно 8 *км*, выезжают два велосипедиста в одном направлении от А к В: первый из пункта А со скоростями 1, 2, 3, 4, 5, . . . *км/час*, второй из пункта В со скоростями 7, 6, 5, 4. . . *км/час*.

Скорости велосипедистов в течение каждого часа постоянны. Второй велосипедист выехал на час позднее первого.

Определить, когда первый велосипедист догонит второго?

(37, 1900; 40, 1962, 1966)

**76.** Из некоторой точки А, лежащей на окружности, вышли одновременно два тела, движущихся по этой окружности в противоположных направлениях. Через некоторое время они встретились и оказалось, что первое тело прошло на 7 *см* больше второго. После встречи тела продолжали путь, причем первое тело пришло в точку А через 4 сек., а второе — через 9 сек. Найти длину окружности, по которой двигались тела.

(15, 1958)

**77.** Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу из А в В и из В в А. После встречи одному приходится быть в пути еще 2 часа, а другому $\frac{9}{8}$ часа. Определить скорость автомобилей, если расстояние между А и В равно 210 *км*.

(15, 1957)

## § 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Разложить на множители следующие выражения:

**78.** $(ab + ac + bc)(a + b + c) - abc$.

(40, 1960)

**79.** $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

(39, 1950, 1965)

**80.** $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.

**81.** $x^4 + x^2 + \sqrt{2}x + 2$.

(40, 1961)

**82.** $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

(40, 1961)

**83.** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

(11, 1948; 30, 1958)

**84.** $y^3(a - x) - x^3(a - y) + a^3(x - y)$.

(12, 1952)

**85.** Представить в виде произведения

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)^2 - x^n.$$

(40, 1955)

**86.** Разложить выражение

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$$

на два множителя, из которых один равен

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

(12, 1951)

Разложить на множители:

**87.** $x^{10} + x^5 + 1.$

(39, 1950, 1960; 40, 1961)

**88.** $\sqrt[3]{a^2b^4} + \sqrt[3]{b^2c^4} + \sqrt[3]{c^2a^4} - \left(\sqrt[3]{b^4c^2} + \sqrt[3]{c^4a^2} + \sqrt[3]{a^4b^2}\right).$

(40, 1961)

Упростить выражения:

**89.** $\dfrac{a-c}{a^2+ac+c^2} \cdot \dfrac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2} \cdot \left(1 + \dfrac{c}{a-c} - \dfrac{1+c}{c}\right) : \dfrac{c(1+c)-a}{bc}.$

(39, 1958)

**90.** $\dfrac{\left[\dfrac{(a+x)^2}{ax} - 4\right] \cdot \left[\dfrac{(a-x)^2}{ax} + 4\right] : (a^6 - x^6)}{(a^2x - ax^2) : [(a+x)^2 - ax] \cdot [(a-x)^2 + ax]} \times \times \dfrac{a - \dfrac{ax}{a+x}}{a + \dfrac{ax}{a-x}}.$

(15, 1957)

**91.** $\left[1{,}5 - \left(x^4 - \dfrac{x^4+1}{x^2+1}\right) \cdot \dfrac{x^3 - x(4x-1) - 4}{x^7 + 6x^6 - x - 6}\right] : \dfrac{x^2 + 29x + 78}{3x^2 + 12x - 36}.$

(15, 1958)

**92.** $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$.

(6, 1958)

**93.** $\left\{\dfrac{1+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(x^3+y^6)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}[1-xy(x^3+y^6)]}\right\}^{-1}$.

(13, 1958)

**94.** $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\times$

$$\times\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}+\frac{a}{x}}}.$$

(6, 1940, 1958)

**95.** $\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\times$

$$\times\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right),$$

если $0<a<1$.

(12, 1950; 16, 1957; 39, 1961)

**96.**

$$\frac{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}+\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}-\left[(a+b^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}.$$

(1, 1939; 6, 1958)

**97.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+\sqrt{7})+$

$$+\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{7}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)^2}-\dfrac{\sqrt{7}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{7}\right)^2}}{\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{7}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)^2}-\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{7}\right)^2}}.$$

(15, 1958)

**98.** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \div \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$

(40, 1953, 1966)

(См. примечание на стр. 20).

**99.** $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}.$

(40, 1949)

**100.** $\left[\sqrt[3]{(n^2+1)\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}+\sqrt[3]{(n^2-1)\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}\right]^{-2},$

если $n>1$.

(16, 1957)

**101.** $\left[\sqrt{\dfrac{(1-n)\sqrt[3]{1+n}}{n}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3n^2}{4-8n+4n^2}}\right]^{-1}:$

$$:\sqrt[3]{\left(\frac{3n\sqrt{n}}{2\sqrt{1-n^2}}\right)^{-1}},$$

если $0<n<1$.

(42, 1959)

Упростить и вычислить следующие выражения:

**102.** $\dfrac{\dfrac{x}{8y^3}+\dfrac{1}{4y^2}}{x^2+2xy+2y^2}-\dfrac{\dfrac{x}{8y^3}-\dfrac{1}{4y^2}}{x^2-2xy+2y^2}-\dfrac{1}{4y^2(x^2+2y^2)}+$

$$+\frac{1}{4y^2(x^2-2y^2)}$$

при $x=\sqrt[4]{2}$, $y=\sqrt[8]{3}$.

(39, 1954)

**103.** $\dfrac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\dfrac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$

при $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

(40, 1953, 1964, 1966)

**104.** $\dfrac{x^2-2x\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}+3}{x-\sqrt{3}}$

при $x=\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$.

(36, 1948)

Примечание. При решении задач № 98, 99 и др. использовать формулу

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

105. $\left(\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}} + \dfrac{\sqrt{1-x^3}}{x\sqrt{x}}\right)^{-1}$

при $x = \sqrt[3]{\dfrac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2a}}$.

(12, 1956)

106. $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$

при $a = (2+\sqrt{3})^{-1}$, $b = (2-\sqrt{3})^{-1}$.

(1, 1939)

107. $x^3 + 3x - 14$

при $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}$.

(36, 1949)

108. $\left(\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{x}\right)^2 - 4a^2 \sqrt[mn]{x^{m+n}}$

при $x = (a + \sqrt{a^2 - 1})^{\frac{2mn}{m-n}}$ $(a > 1,\ m \neq n,\ m \neq 0 \cdot n \neq 0)$.

(1, 1950; 39, 1952, 1957, 1958; 11, 1958)

109. $\left[\dfrac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} + (x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2}$

при $x = a\left(\dfrac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$ $(a > 0,\ n > m > 0)$.

(1, 1950; 39, 1952)

Уничтожить иррациональность в знаменателе:

110. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

(39, 1955)

111. $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$.

(39, 1957)

**112.** $\dfrac{1}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$.

(39, 1957)

**113.** $\dfrac{12}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{5}}$.

**114.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

(39, 1957)

**115.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

(39, 1950, 1958, 1960, 1964)

**116.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

(39, 1957)

**117.** $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$,

где $n$ — любое целое положительное число.

**118.** $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$.

(12, 1950, 1961)

**119.** $\dfrac{1}{(5-\sqrt{3})^5}$.

**120.** $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$,

если $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

(39, 1939)

**121.** $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-2\sqrt[3]{a^3b}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}$.

(39, 1950)

Доказать тождества:

**122.** $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

(39, 1954, 1964)

**123.** $a^3+b^3+c^3=3abc$, если $a+b+c=0$.

(39, 1950, 1961)

**124.** $\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)=$
$=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2+$
$+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\cdots+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2$

(тождество Лагранжа).

**125.** $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

($a\geqslant 0$, $b>0$, $b<a^2$).

**126.** $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times$
$\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$

(41, 1958; 39, 1958, 1961, 1966)

**127.** $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

(11, 1955; 39, 1961)

**128.** $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

(39, 1950; 41, 1958)

**129.** $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=$
$=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$.

(12, 1956)

**130.** $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}=\frac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}$.

(12, 1952)

**131.** $\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+(\sqrt{x}+1)^2(1-\sqrt{x})^{-2}}\cdot\left[\frac{1}{2\sqrt[4]{x}\left(1-\sqrt[4]{x}\right)}-\right.$
$\left.-\frac{1}{2\sqrt[4]{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)}\right]^2-\frac{1}{2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$.

(15, 1957)

**132.** $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+1}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}}=$$

$$=\sqrt{1-k}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right),$$

если $x=\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}$.

(39, 1959)

**133.** $$\frac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1-ax)\sqrt{1-bx}}=1,$$

если $x=\dfrac{\sqrt{\dfrac{2a}{b}-1}}{a}$, $0<a<b<2a$.

(39, 1958)

**134.** Доказать, что

$$x=a+b\sqrt[3]{p}+c\sqrt[3]{p^2}$$

удовлетворяет уравнению

$$x^3-3ax^2+3x(a^2-bcp)-a^3-b^3p-c^3p^2+3abcp=0.$$

**135.** Доказать, что одним из корней уравнения

$$x^3+3px+2q=0$$

является корень

$$x_0=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}.$$

(39, 1953; 40, 1954, 1964)

**136.** Доказать, что

$$\frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{12}+\frac{7x^3}{24}+\frac{5x^2}{12}+\frac{x}{5}$$

при любом целом $x$ есть число целое.

**137.** Доказать, что если $a$, $b$ и $c$ — три вещественных числа, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

то какие-либо два из них равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

(30, 1958)

**138.** Доказать, что число

$$n^2 + 3n + 5$$

ни при каком целом $n$ не делится на 121.

**139.** Доказать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9.

(41, 1958; 39, 1958)

**140.** Разложить дробь

$$\frac{4x}{x^2 - 1}$$

на сумму двух дробей вида

$$\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

(задача Коши).

(40, 1960)

**141.** Упростить выражение

$$\frac{x^3y - xy^3 + y^3z - yz^3 + z^3x - zx^3}{x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2}.$$

(39, 1950)

**142.** Вычислить сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в разложении

$$(6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x - 2)^{1962}.$$

(40, 1961)

**143.** Найти сумму коэффициентов произведения

$$(x^3 - 2x + 2)^{35} \cdot (x^2 - 5x + 3)^{18}.$$

(39, 1958)

**144.** Доказать, что в произведении

$$(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{100})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов не останется членов, содержащих $x$ в нечетной степени.

(39, 1961; 12, 1961)

**145.** Разложить на множители

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15.$$

(39, 1954)

**146.** Показать, что

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10$$

число положительное при всех вещественных значениях $x$.

(40, 1961)

**147.** Найти наименьшее значение выражения

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10.$$

(39, 1960)

**148.** Доказать, что

$$\sqrt{10}\left[(1+\sqrt{10})^{100}-(1-\sqrt{10})^{100}\right]$$

есть число целое.

(39, 1958)

**149.** Доказать, что числа 49, 4489, 444889, . . ., получаемые добавлением числа 48 в середину предыдущего числа, являются точным квадратом.

(11, 1957)

**150.** Показать, что при $n$ нечетном из равенства

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z} \tag{1}$$

вытекает равенство

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}=\frac{1}{x^n+y^n+z^n}. \tag{2}$$

(40, 1961, 1964, 1965)

**151.** Представить в виде суммы трех радикалов

$$\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}}.$$

(40, 1961)

**152.** При каком условии радикал

$$\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$$

можно представить в виде суммы трех радикалов

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z},$$

где $x$, $y$ и $z$ — положительные рациональные числа

(40, 1961)

## § 3. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

Решить следующие уравнения:

**153.**

$$\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

если $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.

(39, 1952, 1965)

**154.** $\dfrac{x+b}{a+b}+\dfrac{x-b}{a-b}=\dfrac{b+x}{a^2+2ab+b^2}-\dfrac{x-b}{a^2-b^2}+\dfrac{2x}{a}.$

(39, 1954, 1956)

155. $\dfrac{x-ab}{a+b}+\dfrac{x-ac}{a+c}+\dfrac{x-bc}{b+c}=a+b+c.$

(39, 1952, 1954, 1956)

156. $\dfrac{6x+2a+3b+c}{6x+2a-3b-c}=\dfrac{2x+6a+b+3c}{2x+6a-b-3c}.$

(39, 1952, 1956)

Решить системы уравнений:

157. $\begin{cases}\dfrac{5}{2u+v}+\dfrac{4}{2u-3v}=5\\ \dfrac{15}{2u+v}+\dfrac{2}{2u-3v}=5,\end{cases}$

если $u\neq\dfrac{3}{2}v$, $u\neq-\dfrac{v}{2}$.

158. $|x-1|+|y-5|=1$
$|x-1|-y=-5.$

(12, 1961; 50, 1963)

159. При каких целых значениях параметра $m$ решения системы

$$\begin{cases}mx-2y=3\\ 3x+my=4\end{cases}$$

удовлетворяют условию $x>0$, $y<0$?

(40, 1961)

160. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(a+b)(x+y)-cz=a-b\\ (b+c)(y+z)-ax=b-c\\ (c+a)(z+x)-by=c-a,\end{cases}$$

если $a+b+c\neq 0$.

(39, 1957)

161. Решить наиболее рациональным способом систему уравнений

$$\begin{cases}x+y+z=39\\ y+z+u=45\\ z+u+x=43\\ u+x+y=41.\end{cases}$$

(39, 1957)

Решить следующие системы уравнений:

**162.**
$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=9 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{v}=11 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{v}=13 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{v}=15. \end{cases}$$

(39, 1954)

**163.**
$$\begin{cases} x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=3 \\ x_1+x_3+x_4+x_5+x_6=5 \\ x_1+x_2+x_4+x_5+x_6=4 \\ x_1+x_2+x_3+x_5+x_6=7 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_6=11 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10. \end{cases}$$

(39, 1950)

**164.**
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_2+x_3+x_4=9 \\ x_3+x_4+x_5=3 \\ x_4+x_5+x_6=-3 \\ x_5+x_6+x_7=-9 \\ x_6+x_7+x_1=-2 \\ x_7+x_1+x_2=2. \end{cases}$$

(39, 1953)

**165.**
$$\begin{cases} 2x_1-x_2=1 \\ -x_1+2x_2-x_3=1 \\ -x_2+2x_3-x_4=1 \\ -x_3+2x_4-x_5=1 \\ -x_4+2x_5-x_6=1 \\ -x_5+2x_6=1. \end{cases}$$

(39, 1950, 1961; 10, 1961)

**166.**
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

(39, 1950; 12, 1961)

**167.**
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + 2x_n = 1. \end{cases}$$

(40, 1961, 1966)

**168.** Найти вещественные корни системы уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{2} + \dfrac{1}{x_1} = x_2 \\ \dfrac{x_2}{2} + \dfrac{1}{x_2} = x_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{x_{n-1}}{2} + \dfrac{1}{x_{n-1}} = x_n \\ \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n} = x_1. \end{cases}$$

(39, 1953; 11, 1957)

Решить следующие системы уравнений:

**169.**
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 + \cdots + x_n = 3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} = n. \end{cases}$$

**170.**
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = a_1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \cdots + nx_n = a_2 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 + \cdots + nx_n = a_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \cdots + nx_{n-1} = a_n. \end{cases}$$

(8, 1927)

## § 4. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

**171.** Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, которое имело бы корень $x = 4 - \sqrt{3}$.

(12, 1961)

**172.** Составить квадратное уравнение с вещественными коэффициентами, которое имело бы корень $x = 2 + 5i$.

(12, 1961)

**173.** Не решая уравнения

$$x^2 - \frac{\sqrt{85}}{4}x + 1\frac{5}{16} = 0,$$

вычислить разность кубов его большего и меньшего корней.

(39, 1957, 1964)

**174.** Не решая уравнения

$$3x^2 + 17x - 14 = 0,$$

найти величину выражения

$$\frac{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}{4x_1x_2^2 + 4x_1^2x_2},$$

где $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения.

(39, 1952)

**175.** Дано квадратное уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Составить такое квадратное уравнение, чтобы его корни
1) отличались от корней данного уравнения только знаками;
2) были обратными корнями данного уравнения;
3) были на данную величину $n$ больше (меньше) корней данного уравнения;
4) были в $n$ раз больше (меньше) корней данного уравнения.

(40, 1955, 1963, 1966)

**176.** Дано квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Составить новое квадратное уравнение так, чтобы его корни были равны квадратам корней данного уравнения.

(37, 1880)

**177.** При каком значении $\lambda$ уравнение

$$(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda - 2 = 0$$

имеет равные корни?

(40, 1955)

178. При каких целых значениях $k$ корни квадратного уравнения

$$kx^2 - (1 - 2k)\,x + k - 2 = 0$$

рациональны?

179. При каких вещественных значениях неизвестной величины $m$ в уравнении

$$2x^2 - (2m + 1)\,x + m^2 - 9m + 39 = 0$$

один корень будет в два раза больше другого? Найти эти корни.

(5, 1946; 50, 1963)

180. Составить квадратное уравнение, корни которого равны кубам корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$.

(39, 1950)

181. Составить квадратное уравнение, корни которого равны кубам корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

(1, 1939; 41, 1958; 40, 1961)

182. Не решая уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

найти сумму кубов его корней.

(39, 1953; 40, 1961; 50, 1964)

183. Определить численное значение параметра $m$ в уравнении

$$4x^2 - 15x + 4m^2 = 0$$

так, чтобы один из корней уравнения был квадратом другого. Найти эти корни.

(39, 1951)

184. Каковы должны быть $p$ и $q$, чтобы корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

были тоже $p$ и $q$.

(12, 1961; 50, 1963)

185. При каких значениях $a$ корни квадратного уравнения

$$x^2 - 4x - \log_2 a = 0$$

действительные.

(1, 1960)

186. Определить численное значение параметра $m$ в уравнении

$$2x^2 + (2m - 1)\,x + m - 1 = 0$$

так, чтобы его корни $x_1$ и $x_2$ удовлетворяли соотношению:

$$3x_1 - 4x_2 = 11.$$

(39, 1951; 42, 1959)

187. Определить численное значение параметра $k$ в уравнении

$$x^2 - (2k + 1)\,x + k^2 + 2 = 0.$$

у которого один корень равен половине другого.

(12, 1961)

**188.** Определить численное значение параметра $a$ в уравнении

$$x^2 - ax + a - 1 = 0,$$

при котором $x_1^2 + x_2^2$ будет наименьшим ($x_1$ и $x_2$ — корни квадратного уравнения, $a$ — вещественное число).

**189.** Какому условию должны удовлетворять коэффициенты двух квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0,$$

чтобы эти уравнения имели общий корень ($a \neq 0$, $a_1 \neq 0$)?

(40, 1962)

**190.** При каком значении параметра $m$ уравнения

$$2x^2 - (3m + 2)\,x + 12 = 0$$

$$4x^2 - (9m - 2)\,x + 36 = 0$$

имеют общий корень?

(41, 1958)

**191.** Составить биквадратное уравнение с рациональными коэффициентами, если известны два его корня: $\sqrt{5}$ и $3i$.

(40, 1962; 1963, 1966)

**192.** Определить значения параметра $k$, при котором корни уравнения

$$x^2 - (3k + 2)\,x + k^2 = 0$$

удовлетворяют соотношению $x_1 = 9x_2$.

(40, 1962)

Решить следующие уравнения:

**193.** $(x^2 - 16x)^2 - 2(x^2 - 16x) - 63 = 0.$

(39, 1952, 1954)

**194.** $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = 0.$

(39, 1953, 1954)

**195.** $\dfrac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 2x + 3} = 4 + 2x + x^2.$

(39, 1954)

**196.** $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0{,}5625.$

(39, 1958)

**197.** $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680.$

(39, 1958)

198. $(8x + 7)^2 (4x + 3) (x + 1) = 4{,}5.$

(40, 1962)

199. $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2) (x - 3) = 1.$

(16, 1897)

200. $(x + a) (x + 2a) (x - 3a) (x - 4a) = b^4.$

(39, 1960)

201. $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0.$

(40, 1950)

202. $(x + 1)^4 = 2 (1 + x^4).$

(39, 1958)

203. $(3 - x)^4 + (2 - x)^4 = (5 - 2x)^4.$

(40, 1961, 1964, 1966)

204. $\dfrac{1}{x^2 - 2x + 2} + \dfrac{2}{x^2 - 2x + 3} = \dfrac{6}{x^2 - 2x + 4}.$

(39, 1952)

205. $(6x + 5)^2 (3x + 2) (x + 1) = 35.$

(39, 1955)

206. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 = \dfrac{17}{4}.$

(6, 1958; 12, 1961)

207. $\dfrac{x+1}{x^3 + x - 1} + \dfrac{x^3 + x - 1}{x + 1} = 2.$

(37, 1943; 12, 1961)

208. $x^3 + 1 + \dfrac{1}{x^3 + 1} = 2{,}5.$

(37, 1943)

209. $(x + 1)^6 + 20 = 9 (x + 1)^3.$

(37, 1943)

210. $(5 - x)^4 + (2 - x)^4 = 17.$

(40, 1955)

211. $x^4 - 2x^3 + x - 132 = 0.$

(40, 1956)

212. $x^6 = \dfrac{257x^2 - 68}{68x^2 - 257}.$

(40, 1956, 1966)

213. $x^4 + (x - 1)^4 = 97.$

214. $(x - 2)^6 - 19 (x - 2)^3 = 216.$

215. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = 5.$

216. $2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0.$

**217.** Решить уравнение

$$x^3 + 4 = 3x^2,$$

выделив предварительно один целый корень.

(37, 1936)

**218.** Решить уравнение

$$(1 + x^2)^2 = 2kx\,(1 - x^2),$$

где коэффициент $k$ равен пределу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $u_1 = 1{,}25$; $u_2 = 0{,}5$.

(12, 1950)

**219.** $\dfrac{2 + x^3}{x^4 - 2x} = \dfrac{x^2}{3}$.

(39, 1951)

**220.** $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$
(задача Декарта).

(40, 1962, 1966)

**221.** $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

(42, 1959)

**222.** $\dfrac{(a - x)^4 + (x - b)^4}{(a + b - 2x)^2} = \dfrac{a^4 + b^4}{(a + b)^2}$.

(40, 1961)

**223.** Известно, что один из корней уравнения

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$$

равен $i$. Найти остальные корни.

(42, 1959)

**224.** Найти действительные корни уравнения

$$2x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 14x^2 + 11x + 5 = 0.$$

(40, 1961)

**225.** Решить уравнение

$$x^5 + 25x^3 - 8x^2 + k = 0,$$

зная, что один из корней его равен $5i$.

(42, 1959)

**226.** Доказать, что если $x_1$, $x_2$, $x_3$ и $x_4$ корни биквадратного уравнения

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

то между коэффициентами и корнями уравнения существуют следующие соотношения:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{b}{a},$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0,$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{c}{a}.$$

(40, 1961, 1966)

227. Найти сумму корней, сумму их квадратов, кубов, четвертых и пятых степеней корней уравнения

$$ax^4 + bx^2 + c = 0. \quad (1)$$

(40, 1961)

228. Составить биквадратное уравнение с вещественными коэффициентами: 1) если известны его корни $\sqrt{5}$ и $3i$; 2) имеющее корень $x_1 = 5 - 2i$.

(40, 1961)

229. Определить зависимость между коэффициентами $p$ и $q$ уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ при условии, что его корни составляют арифметическую прогрессию.

(40, 1961)

230. Определить численное значение параметра $k$, при котором корни уравнения

$$x^4 - (3k + 2)x^2 + k^2 = 0$$

образуют арифметическую прогрессию.

(40, 1961)

231. Доказать, что для кубического уравнения

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

между корнями и коэффициентами существуют следующие зависимости:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a},$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

232. Решить кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

если корни его составляют:

1) арифметическую прогрессию;

2) геометрическую прогрессию.

(40, 1959, 1963, 1966)

233. Решить уравнение

$$x^8 - [a^2(2 + \sqrt{2}) + b^2(2 - \sqrt{2})][a^2(2 - \sqrt{2}) + b^2(2 + \sqrt{2})]x^4 + (a^2 - b^2)^4 = 0.$$

(40, 1961)

**234.** Доказать, что уравнение

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

не имеет вещественных корней.

(39, 1954; 40, 1961)

**235.** Доказать, что уравнение

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$$

не имеет целых положительных решений.

(39, 1954)

**236.** Доказать, что корни двучленного уравнения

$$x^n - 1 = 0$$

находятся по формулам

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$.

**237.** Решить двучленное уравнение

$$x^9 - 1 = 0.$$

(40, 1961)

**238.** Доказать, что в уравнении

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$$

корни соответственно равны $a$, $b$ и $c$ (задача Виета).

(40, 1961, 1964, 1965)

**239.** Доказать, что если многочлен

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

принимает при $x = 0$ и $x = 1$ нечетные значения, то уравнение

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

не имеет целых корней ($a_i$ — целые положительные числа, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$).

(39, 1958)

**240.** Доказать, что положительный корень уравнения

$$x^5 + x - 10 = 0$$

является числом иррациональным.

(40, 1961)

**241.** Найти один из положительных корней уравнения

$$x^n - nax^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2} - \cdots - a^n = 0 \ (a > 0).$$

(40, 1959)

**242.** Найти целое положительное значение $x$, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2x-1)}{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{x(x+1)}}=110.$$

(40, 1961, 1963, 1965)

**243.** Решить в целых числах уравнение

$$1!+2!+3!+\cdots+x!=y^2.$$

**244.** Найти все рациональные положительные числа, удовлетворяющие уравнению

$$x^y=y^x$$

(задача Эйлера).

(8, 1927; 40, 1955)

## § 5. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решить следующие уравнения: *

**245.** $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}.$

**246.** $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0.$

**247.** $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$

**248.** $\frac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}}=\frac{21}{x}\quad(x\neq 0).$

**249.** $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$

(11, 1956; 12, 1958)

**250.** $\sqrt{5-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}}=1.$

(12, 1958)

**251.** $\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}+\frac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=1.$

(12, 1961)

**252.** $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}\quad(x\neq 0).$

(1, 1950; 40, 1960)

**253.** $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=x^2\quad(x\neq 0).$

(40, 1960)

---

* Значения радикалов берутся арифметические.

**254.** $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$.

**255.** $\dfrac{(x+a)\sqrt{x+b}+(x+b)\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}+\sqrt{x+a}}=\sqrt{ab}$,

где $ab\geqslant 0$.

(8, 1939)

**256.** $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.

(36, 1948)

**257.** $2\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}=3$.

(36, 1947, 1950, 1965)

**258.** $\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5x+2}}+\sqrt[3]{\dfrac{5x+2}{x+3}}=\dfrac{13}{6}$.

(40, 1952)

**259.** $\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{4}}+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}=2\left[\dfrac{1-a^2}{(1+a)^2}\right]^{\frac{1}{4}}$,

где $|a|<1$.

(40, 1954, 1964)

**260.** $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\dfrac{15}{8}\sqrt[3]{\dfrac{x}{15}}$,

если $-1<x<1$.

(40, 1954)

**261.** $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=34$.

(8, 1928)

**262.** $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$.

(37, 1883)

**263.** $\sqrt{2x^2-9x+4}+3\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x^2+21x-11}$.

**264.** $\dfrac{3+x}{3x}=\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{x^2}}}$.

(6, 1958)

**265.** $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x-1}=1$.

**266.** $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{2a}$.

**267.** $\sqrt[4]{x^2+4}+\dfrac{4\sqrt[4]{x^2+4}}{x^2}=5\sqrt[4]{5x^2}.$

(52, 1967)

**268.** $\dfrac{\left[\sqrt[3]{(a-x)^2}-\sqrt[3]{(a-x)(x-b)}+\sqrt[3]{x-b)^2}\right]^2}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=a-b.$

(40, 1955, 1965)

**269.** $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=12.$

(23, 1940)

**270.** $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}.$

(40, 1955)

**271.** $\sqrt[5]{\dfrac{a+x}{a}}+\sqrt[5]{\dfrac{a+x}{b}}=\sqrt[5]{\dfrac{x}{ab}}.$

(40, 1955, 1966)

**272.** $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}=4.$

(40, 1952)

**273.** $\sqrt[3]{\dfrac{a+x}{a-x}}-\sqrt[3]{\dfrac{a-x}{a+x}}=\sqrt[3]{\dfrac{b+x}{b-x}}-\sqrt[3]{\dfrac{b-x}{b+x}},$

где $a\neq b$, $ab<0$, $a+b\neq 0$.

(39, 1952)

**274.** $\sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}=\sqrt[3]{a^2}.$

(40, 1961)

**275.** $\sqrt[n]{\dfrac{a-x}{b+x}}+\sqrt[n]{\dfrac{b+x}{a-x}}=2.$

(12, 1957)

**276.** $\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^n x^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{a^{n^2}x^n}}=b,$

где $b>a>0$ и $n$ — целое положительное число. Найти положительный корень уравнения.

(12, 1957)

**277.** Найти положительный корень уравнения

$$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b},$$

где $a>b>0$.

(12, 1957; 40, 1957)

**278.** Найти действительные корни уравнения

$$\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\cdots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}}}=x,$$

считая все $n$ подкоренных выражений положительными.

(40, 1954, 1964, 1965)

## § 6. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Решить следующие системы уравнений:

**279.** $\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

(6, 1958)

**280.** $\begin{cases} x+xy+y=7 \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$

(30, 1958)

**281.** $\begin{cases} 4x^2+9y^2=10 \\ 2xy=1. \end{cases}$

(22, 1953)

**282.** $\begin{cases} x^2-xy-y^2=-11 \\ (x^2-y^2)\,xy=180. \end{cases}$

(6, 1958)

**283.** При каких значениях параметра $m$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ mx-y+4-3m=0 \end{cases}$$

имеет два равных решения?

(42, 1959)

**284.** $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x+xy+y=9. \end{cases}$

(39, 1951; 40, 1960)

**285.** $\begin{cases} x^2+3xy=18 \\ xy+4y^2=7. \end{cases}$

(39, 1955; 12, 1961)

286. $\begin{cases} x(x+1)(3x^2+5y)=144 \\ 4x^2+x+5y=24 \end{cases}$

(39, 1961)

287. $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$

(39, 1955, 1957)

288. $\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y) \\ x^3+y^3=7(x+y). \end{cases}$

(39, 1958)

289. $\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2=27xy \\ (x^2+1)(y^2+1)=10xy. \end{cases}$

(40, 1961, 1962, 1964, 1965)

290. $\begin{cases} (x+y)(xy+1)=18xy \\ (x^2+y^2)(x^2y^2+1)=208x^2y^2. \end{cases}$

(39, 1951; 40, 1960)

291. $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

(32, 1953)

292. $\begin{cases} x^3-y^3=602. \\ xy^2-x^2y=-198. \end{cases}$

(31, 1957)

293. $\begin{cases} (x+y)^4+4(x+y)^2=117 \\ x-y=25. \end{cases}$

(31, 1957)

294. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=481 \\ x^2+xy+y^2=37. \end{cases}$

295. $\begin{cases} x^4+y^4=b^4 \\ x+y=a. \end{cases}$

Исследовать решение, если $a \neq 0$, $b \neq 0$.

(40, 1952, 1963, 1966)

296. $\begin{cases} x^5+y^5=a^5 \\ x+y=a, \end{cases}$

считая $a \neq 0$.

(40, 1952)

**297.** $\begin{cases} x^5 + y^5 = a^5 \\ x + y = b, \end{cases}$

считая $b \neq 0$, $a \neq 0$.

**298.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78, \end{cases}$

где $x > 0$, $y > 0$.

(12, 1958)

**299.** $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ xy = 27. \end{cases}$

(36, 1948)

**300.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{5x}} + \sqrt{\dfrac{5x}{x+y}} = \dfrac{34}{15} \\ x + y + xy = 29. \end{cases}$

(3, 1931; 36, 1948; 12, 1957)

**301.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}} = 2 \\ x + y = 12. \end{cases}$

(16, 1955)

**302.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{6x}} = \dfrac{5}{2} \\ xy - x - y = 9. \end{cases}$

(39, 1961; 50, 1963)

**303.** $\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4 \\ x + y = 20. \end{cases}$

(39, 1958)

**304.** $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2}} = \dfrac{5+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}} \\ x^3 + 2y^3 = 118. \end{cases}$

(15, 1901; 40, 1962)

305. $\begin{cases} 3x = 2y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 196. \end{cases}$

306. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 50 \\ \dfrac{x}{z} = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$

307. $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ xy + xz + yz = 27, \end{cases}$

если $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

(11, 1956)

308. $\begin{cases} x + y + z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{3} \\ xyz = 1. \end{cases}$

(40, 1955)

309. $\dfrac{x}{y+z} = \dfrac{y}{x+z+1} = \dfrac{z}{x+y-1} = x + y + z.$

(12, 1951)

310. $\begin{cases} x(x + y + z) = a \\ y(x + y + z) = b \\ z(x + y + z) = c, \end{cases}$

если $a + b + c \neq 0$.

(37, 1879)

311. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = ax = by = cz,$

если $a + b + c \neq 0$.

(8, 1927)

312. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = a \\ \dfrac{xz}{x+z} = b \\ \dfrac{yz}{y+z} = c. \end{cases}$

(40, 1959, 1962)

**313.** $(x+y):(5-z):(y+z):(9+y)=3:1:2:5.$

(38, 1959; 40, 1962)

**314.** $\dfrac{x+y-z}{5}=\dfrac{y+z-x}{7}=\dfrac{z+x-y}{11}=\dfrac{xyz}{9}.$

(39, 1950)

**315.** $\begin{cases} x^2+y^2+xy=37 \\ x^2+z^2+xz=28 \\ y^2+z^2+yz=19. \end{cases}$

(40, 1962)

**316.** $\begin{cases} (y+z)^2-x^2=a^2 \\ (z+x)^2-y^2=b^2 \\ (x+y)^2-z^2=c^2. \end{cases}$

(15, 1901; 40, 1962, 1965)

**317.** $\begin{cases} (y+z)(x+y+z)=a \\ (z+x)(x+y+z)=b \\ (x+y)(x+y+z)=c. \end{cases}$

(40, 1961)

**318.** $\begin{cases} x(y+z)=a^2 \\ y(x+z)=b^2 \\ z(x+y)=c^2. \end{cases}$

(39, 1961)

**319.** $\begin{cases} \dfrac{10}{3x}+\dfrac{5}{y}-\dfrac{3}{2z}=4\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3y-4z}{yz}=4 \\ xy+10yz-5xyz=0. \end{cases}$

(40, 1962, 1965)

**320.** $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$

(16, 1897; 1, 1950; 40, 1962)

**321.** $\begin{cases} x+y+z=9 \\ xy+xz+yz=26 \\ xyz=24. \end{cases}$

(39, 1958; 40, 1961)

**322.**
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14 \\ (x^2+y^2)^2+(y^2+z^2)^2+(x^2+z^2)^2=294 \\ \dfrac{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}{y^2+z^2}=\dfrac{50}{13}. \end{cases}$$

(39, 1961)

**323.**
$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=18 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4. \end{cases}$$

(40, 1962)

**324.**
$$\begin{cases} x=2(x+y+z)\sqrt[3]{xyz} \\ y=3(x+y+z)\sqrt[3]{xyz} \\ z=4(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}, \end{cases}$$

где $x>0$, $y>0$; $z>0$.

(40, 1951)

**325.**
$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{xyz}+\dfrac{7}{3}\sqrt[6]{xyz} \\ y=\sqrt[3]{xyz}+\dfrac{7}{5}\sqrt[6]{xyz} \\ z=\sqrt[3]{xyz}-\dfrac{7}{8}\sqrt[6]{xyz}, \end{cases}$$

где $x>0$, $y>0$, $z>0$.

(40, 1953)

**326.**
$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{7}{12} \\ \dfrac{z+t}{zt}=\dfrac{5}{18} \\ x+y+z+t=22 \\ xyzt=648. \end{cases}$$

**327.**
$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_2}{x_3}=\cdots=\dfrac{x_{n-1}}{x_n} \\ x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=15 \\ x_1=8x_4. \end{cases}$$

(8, 1927; 40, 1957)

**328.**
$$\begin{cases} \dfrac{x_2 \cdot x_3 \ldots x_n}{x_1} = a_1 \\ \dfrac{x_1 \cdot x_3 \ldots x_n}{x_2} = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_{n-1}}{x_n} = a_n \end{cases}$$

$(a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \ldots,\ a_n > 0;\ x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \ldots,\ x_n > 0)$.

(8, 1927; 11, 1956; 40. 1957, 1963, 1965)

**329.**
$$\begin{cases} x! + y! = z! \\ x + y = z. \end{cases}$$

(39, 1950)

## § 7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

**330.** Доказать теорему Виета для случая, когда корни квадратного уравнения мнимые.

**331.** При каких вещественных значениях $n$ корни квадратного уравнения

$$(n + 5)\,x^2 - 2nx + (n - 1) = 0$$

будут комплексными?

**332.** При каком численном значении $k$ корни квадратного уравнения

$$x^2 - 2\,(3 + i)\,x + k = 0$$

будут равными?

(40, 1961)

**333.** Можно ли утверждать, что комплексное число $3 + 8i$ больше, чем $1 + 2i$?

(12, 1961)

**334.** При каких вещественных значениях $x$ и $y$ справедливо равенство

$$\frac{(x - 4) + (y - 1)\,i}{1 + i} = 2 - 5i?$$

**335.** Вычислить модуль комплексного числа

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{2xy}}{(x - y) + 2i\sqrt{xy}}.$$

(12, 1961)

336. Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$z = \frac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 + \cos\alpha - i\sin\alpha}.$$

(42, 1959)

337. Доказать, что если модуль комплексного числа равен единице, то его можно представить в виде $\frac{c+i}{c-i}$, где $c$ — вещественное число.

(39, 1958, 1961; 42, 1959)

338. Представить в тригонометрической форме число $1-i$.

339. Представить в тригонометрической форме два числа: $+1$ и $-1$.

Вычислить выражения:

340. $\left(\frac{4}{\sqrt{3}\,i-1}\right)^{12}$.

341. $\frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96}-i\,(1+i)^{98}}$.

(39, 1960)

342. Показать, что

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}=\sqrt{6}$$

(задача Лейбница).

(40, 1961, 1963, 1964, 1965)

343. Вычислить произведение

$$\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)\right]\cdot\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2}\right]\times$$
$$\times\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right]\cdots\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right],$$

если $n \geqslant 1$.

(11, 1957)

344. Доказать, что

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n}=\begin{cases}2, \text{ если } n=3k,\\ -1, \text{ если } n=3k+1\\ \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).\end{cases}$$

Вычислить:

345. $\sqrt{i}$.

346. $\sqrt[3]{i}$.

347. $\sqrt[n]{1}$.

(40, 1961)

348. а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[6]{1}$.

349. $\sqrt[3]{-2+2i}$.

**350.** Доказать, что произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма квадратов двух целых чисел, есть опять сумма квадратов двух целых чисел.

(39, 1957)

**351.** Выражение

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$$

представить в виде суммы двух квадратов.

(40, 1962)

**352.** Решить уравнение

$$(2 + i)x^2 - (5 - i)x + 2 - 2i = 0.$$

(40, 1962)

**353.** Доказать, что

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \qquad (A)$$

где $n$ — целое положительное число (формула Муавра).

(40, 1958)

**354.** Написать формулу для $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через степени $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

(39, 1954)

**355.** Доказать, что

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\varphi,$$

если

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\varphi.$$

(40, 1955, 1965; 39, 1961)

**356.** Доказать, что если

$$\left(\frac{a+i}{a-i}\right)^n = 1,$$

то

$$a = \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n},$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$.

(40, 1961)

**357.** Доказать тождество

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right).$$

(39, 1959)

**358.** Доказать тождество

$$x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right).$$

(40, 1961)

**359.** Вычислить сумму

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots,$$

где $n$ — целое положительное число.

**360.** Вычислить величину суммы

$$S_n = 1 + i^2C_n^1 + i^6C_n^3 + \cdots$$

(40, 1962)

**361.** Вычислить сумму биномиальных коэффициентов, номера которых образуют арифметическую прогрессию

$$1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + C_n^{16} + \cdots$$

(40, 1961)

**362.** Доказать тождество

$$1 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots = \frac{2}{3}\left(2^{n-1} + \cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

(40, 1961)

## § 8. НЕРАВЕНСТВА

**363.** Доказать, что неравенство

$$|x| < \alpha$$

равносильно двойному неравенству

$$-\alpha < x < \alpha.$$

(40, 1960, 1964, 1965)

**364.** Доказать, что

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

(40, 1960)

**365.** Доказать, что

$$|x - y| \geqslant |x| - |y|.$$

(40, 1960)

**366.** Доказать, что если $x$ и $y$ — два положительных числа, то

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2.$$

(39, 1939)

**367.** Доказать, что для положительных чисел $a$, $b$ и $c$ имеют место неравенства

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3,$$

причем равенство имеет место при $a=b=c$.

(39, 1950)

**368.** Доказать, что для любых положительных чисел $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ имеют место неравенства

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\geqslant n.$$

**369.** Доказать, что

$$\frac{a}{b}<\frac{a+k}{b+k},$$

если $a<b$, $a>0$, $b>0$, $k>0$.

**370.** Если $a$, $b$ и $c$ — длины сторон некоторого треугольника, то

$$abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Доказать.

**371.** Доказать, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

(39, 1955)

**372.** Доказать, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

(39, 1956)

**373.** Решить неравенство

$$\frac{x}{3}-3\left[5x-\frac{2-3(x-5)}{4}\right]>x+3\frac{19}{24}.$$

(38, 1952)

**374.** Решить неравенство

$$6x^2-29x+30<0.$$

(38, 1950)

**375.** Решить неравенство

$$-3x^2+5x+2>0.$$

**376.** Имеются заведомо неточные весы (коромысла весов разной длины). Зная это, отвешивают часть товара на одной чашке весов, а часть — на другой.

Компенсируется ли этим неточность весов?

(39, 1950, 1957)

**377.** Сумма наибольшего и наименьшего положительных членов геометрической пропорции больше суммы двух остальных (неравенство Евклида). Доказать.

**378.** Доказать, что

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 \cdot a_2},$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ (неравенство Евклида).

(41, 1958)

**379.** Доказать, что

$$\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_3} + \cdots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

(39, 1951)

**380.** Доказать, что

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \cdots (1 + a_n) \geqslant 2^n,$$

если $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$ и $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 1$.

(39, 1951)

**381.** Доказать, что

$$(1 + x)^n > 1 + nx,$$

если $1 + x > 0$, $n$ — натуральное число, большее единицы (неравенство Я. Бернулли).

**382.** Доказать, что

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

где $n$ — натуральное число ($n > 2$).

(40, 1965)

**383.** Доказать, что

$$(a - x)(a - y)(a - z) > 8xyz,$$

где $x$, $y$, $z$ — положительные числа и $x + y + z = a$.

**384.** Доказать, что

$$(n!)^2 \geqslant n^n,$$

где $n$ — целое положительное число, большее единицы.

(41, 1958; 39, 1958)

**385.** Доказать, что

$$\sqrt[n]{n!} \geqslant \sqrt{n},$$

где $n$ — целое положительное число.

**386.** Доказать неравенство вида

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geqslant$$

$$\geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2,$$

причем знак равенства имеет место только при условии, что

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

(неравенство В. Я. Буняковского).

(39, 1950)

**387.** Доказать, что для положительных чисел $a$, $b$ и $c$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

(39, 1957)

**388.** Доказать, что для положительных чисел $a_1$, $a_2$, . . ., $a_n$ справедливо неравенство

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

(39, 1951)

**389.** Доказать, что для положительных чисел $a_1$, $a_2$, . . ., $a_n$ справедливо неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Знак равенства имеет место лишь в том случае, когда

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$$

(неравенство Коши).

(40, 1951)

**390.** Доказать, что

$$n! \leqslant \left(\frac{1+n}{2}\right)^n,$$

где $n$ — целое положительное число.

**391.** Доказать, что для любого целого положительного числа $n$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1.$$

(40, 1956, 1966)

**392.** Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

где $n>2$.

(40, 1961)

**393.** Доказать неравенства

$$\left(a_1\pm\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2\pm\frac{1}{a_2}\right)^2+\cdots+\left(a_n\pm\frac{1}{a_n}\right)^2\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{S_n}{n}\pm\frac{n}{S_n}\right)^2\cdot n,$$

где $n\geqslant 2$, $a_1>0$, $a_2>0$, . . ., $a_n>0$,

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.

(40, 1962, 1966)

## § 9. ПРОГРЕССИИ

Обозначения: $a_1$ и $a_n$ — первый и $n$-ый (общий) члены арифметической прогрессии (А. П.), $n$ — число членов, $d$ — разность, $S$ — сумма членов; $u_1$ и $u_n$ — первый и $n$-ый (общий) члены геометрической прогрессии (Г. П.), $n$ — число членов, $q$ — знаменатель прогрессии, $S$ — сумма членов.

**394.** Найти арифметическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 27, а сумма квадратов этих же трех членов равна 275.

(20, 1936)

**395.** Найти арифметическую прогрессию, в которой, сколько бы ни взять членов, сумма их всегда будет равна утроенному квадрату числа этих членов.

(29, 1948; 12, 1950; 40, 1966)

**396.** Крайние члены арифметической прогрессии, имеющей 7 членов, равны 11 и 35. Сколько членов в другой арифметической прогрессии, крайние члены которой 38 и 13, если четвертые члены обеих прогрессий одинаковы.

(18, 1935)

**397.** При рытье колодца условились платить за каждый последующий метр глубины на два рубля дороже, чем за предыдущий. Вследствие этого последний метр и третий с конца вместе взятые обходятся во столько, сколько стоил бы весь колодец, если бы каждый метр, независимо от глубины, стоил столько, сколько стоил первый. Средняя стоимость одного метра равна 17 руб. Вычислить глубину колодца.

(37, 1880)

**398.** Сколько одинаковых членов находится в двух арифметических прогрессиях

$$\div 5,\ 8,\ 11,\ \ldots \text{и } \div 3,\ 7,\ 11,\ \ldots,$$

если в каждой из них $n = 100$.

(12, 1951)

**399.** В арифметической прогрессии $a_m = n$, $a_n = m$ $(m \neq n)$. Найти $a_p$.

(14, 1940)

**400.** Между 1 и 31 вставить столько средних арифметических, чтобы их сумма была вчетверо больше суммы двух наибольших из них.

**401.** Найти сумму первых ста чисел, которые при делении на 5 дают остаток 1.

**402.** Сумма второго и двадцатого членов арифметической прогрессии равна 10, а произведение этих членов равно $23\frac{47}{64}$. Найти сумму первых 16 членов этой прогрессии.

(37, 1882)

**403.** Найти двадцатый член возрастающей арифметической прогрессии, если

$$a_2 \cdot a_5 = 52$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 34.$$

(12, 1902, 1961)

**404.** Вычислить число членов арифметической прогрессии, если

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = 126$$

$$a_2 + a_{2n} = 42.$$

(38, 1952)

**495.** Доказать, что если числа $a$, $b$ и $c$ образуют арифметическую прогрессию, то числа вида

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}};\quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}};\quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

также образуют арифметическую прогрессию.

(11, 1948; 30, 1950)

**406.** В арифметической прогрессии сумма $n$ первых членов равна сумме $m$ ее первых членов $(m \neq n)$. Доказать, что сумма $S_{m+n}$ ее членов равна нулю.

(39, 1958)

**407.** Доказать, что если $S_n$, $S_{2n}$, $S_{3n}$ — суммы $n$, $2n$ и $3n$ членов арифметической прогрессии, то

$$S_{3n} = 3\,(S_{2n} - S_n).$$

**408.** Найти арифметическую прогрессию, в которой $S_n = 3n^2 + 4n$, где $S_n$ — сумма $n$ первых членов А. П., $n$ — числу членов.

(39, 1958)

**409.** Известно, что для некоторой арифметической прогрессии имеет место равенство

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Доказать, что

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

(39, 1961, 1966)

**410.** При каких значениях $x$ три числа

$$\lg 2,\ \lg(2^x - 1) \text{ и } \lg(2^x + 3),$$

взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию.

(1, 1960)

**411.** Доказать, что если $\log_k x$, $\log_m x$ и $\log_n x$ образуют арифметическую прогрессию, то

$$n^2 = (kn)^{\log_k m} \ (x > 0).$$

(1, 1950; 11, 1955)

**412.** Из нечетных чисел образуют группы

$$(1),\ (3, 5),\ (7, 9, 11),\ \ldots,$$

так что $n$-ая группа содержит $n$ членов. Вычислить сумму чисел $n$-ой группы.

(40, 1961)

**413.** Берут ряд натуральных чисел 1, 2, 3, 4. . . и составляют из них группы так, чтобы каждая оканчивалась квадратом 1, (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16). . .

Найти, сколько членов в $k$-ой группе и сумму членов этой группы.

(40, 1960, 1964, 1966)

**414.** Доказать, что в арифметической прогрессии с четным числом членов сумма членов второй половины превышает сумму членов первой на число, кратное квадрату половины числа членов.

(40, 1951)

**415.** Найти такую арифметическую прогрессию, в которой между суммой ее первых $n$ членов и суммой $kn$ следующих существовало бы постоянное отношение, не зависящее от $n$.

(11, 1955)

**416.** Найти четыре четных положительных числа, составляющих арифметическую прогрессию, при условии, что произведение суммы трех последних на сумму двух крайних будет равно кубу полусуммы двух первых.

(40, 1961)

**417.** Доказать, что если числа $a_1$, $a_2$, $a_3$, . . ., $a_n$ образуют арифметическую прогрессию, то

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

($a_1 \neq 0$, . . ., $a_n \neq 0$).

(40, 1961)

**418.** Доказать, что для всякой арифметической прогрессии $a_1$, $a_2$, $a_3$, . . ., $a_n$ имеет место тождество

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

(39, 1951)

**419.** Дана арифметическая прогрессия

1, 18, 35, . . .

Найти члены этой прогрессии, которые можно записать с помощью одних троек.

(40, 1962)

**420.** Найти четыре целых числа, составляющих арифметическую прогрессию, при условии, что наибольшее из них равно сумме квадратов трех остальных.

(39, 1960)

**421.** Найти условие, при котором три числа $a$, $b$ и $c$ были бы $k$-тым, $p$-тым и $q$-тым членами некоторой арифметической прогрессии.

(40, 1961)

**422.** Доказать, что $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

(39, 1956)

**423.** Два тела падают на землю, причем начало падения 1-го тела наступило на 3 сек. раньше начала падения 2-го тела. За первую секунду падающее тело проходит 4,9 *м*, за каждую следующую секунду его скорость увеличивается на 9,8 *м*. Когда расстояние между телами будет равно одному километру?

**424.** Рабочий обслуживает 16 ткацких станков-автоматов. Производительность каждого станка *т м/час*. Первый станок рабочий пустил в 8 час. (начало рабочей смены), а каждый следующий — на 2 мин. позже. Определить выработку (в метрах) за 7-часовую смену.

**425.** Найти отношение корней биквадратного уравнения, если известно, что они составляют арифметическую прогрессию.

(40, 1961, 1966)

**426.** Четыре последовательных целых числа образуют арифметическую прогрессию. Произведение первого числа на четвертое равно большему корню уравнения

$$x^{1+\lg x} = 0{,}001^{-\frac{2}{3}}$$

а сумма квадратов второго и третьего числа в 5 раз больше того числа, которое представляет собой номер члена разложения

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + x^{\frac{1}{6}}\right)^{20},$$

не зависящего от $x$. Найти эти числа.

(41, 1958)

**427.** В геометрической прогрессии дано $q = 2$, $n = 7$ и $S = 635$. Найти $u_1$ и $u_n$.

(15, 1936)

**428.** В геометрической прогрессии $u_m = k$, $u_n = l$. Найти $u_p$.

(18, 1936)

**429.** Доказать, что в геометрической прогрессии, состоящей из четного числа членов, отношение суммы членов, стоящих на четных местах, к сумме членов, стоящих на нечетных местах, равно знаменателю прогрессии.

(12, 1953)

**430.** В геометрической прогрессии дано:

$$u_1 + u_5 = 51$$
$$u_2 + u_6 = 102.$$

При каком значении $n$ $S_n = 3069$.

**431.** Разность между вторым и первым членом геометрической прогрессии равна 18, разность между четвертым и третьим равна 162. Составить прогрессию.

**432.** Найти сумму $n$ чисел вида

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \ldots$$

(3, 1928; 39, 1951, 1961; 20, 1960; 44, 1961)

**433.** Между числами $\frac{b^2}{a^3}$ и $\frac{a^2}{b^3}$ вставить 9 средних пропорциональных количеств.

(36, 1948; 40, 1961)

**434.** Между числами 1 и 256 вставить три средних геометрических.

(26, 1937; 40, 1962)

**435.** Сумма трех последовательных членов геометрической прогрессии равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3. Найти эти члены прогрессии.

(12, 1961; 40, 1965)

**436.** Определить три числа, образующих геометрическую прогрессию, если сумма их равна 21, а сумма обратных величин равна $\frac{7}{12}$.

(39, 1957)

**437.** Число 195 разделить на три части так, чтобы полученные числа составляли геометрическую прогрессию, при этом первый член был бы меньше третьего на 120.

**438.** По преданию, индийский шах позволил изобретателю шахматной игры самому себе назначить награду. Изобретатель просил, чтобы ему на первую клетку шахматной доски было положено одно пшеничное зерно, на вторую — два, на третью — четыре и так далее, на каждую следующую клетку в 2 раза больше, чем на предыдущую. Узнать, сколькими цифрами изображается число зерен, предназначенное изобретателю шахмат; прочитать полученное число.

(40, 1960, 1966)

**439.** Основания четырех логарифмов одного и того же числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным этому числу. Найти эти логарифмы, если известно, что сумма первых двух из них равна сумме остальных.

(40, 1961, 1965)

**440.** Доказать, что если $\lg m$, $\lg n$ и $\lg p$ составляют геометрическую прогрессию, то и $\log_m x$, $\log_n x$ и $\log_p x$, где $x$ — любое положительное число, тоже составляют геометрическую прогрессию.

(39, 1957)

**441.** Число членов геометрической прогрессии четное. Сумма всех ее членов в три раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найти знаменатель прогрессии.

(39, 1958)

**442.** Вычислить сумму квадратов $n$ членов геометрической прогрессии, у которой первый член равен $u_1$ и знаменатель $q$.

(40, 1961)

**443.** Доказать, что в геометрической прогрессии сумма квадратов нечетного числа членов делится без остатка на сумму первых степеней тех же членов.

(40, 1961, 1966)

**444.** Найти бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, у которой каждый член был бы в 10 раз больше суммы всех следующих за ним.

**445.** При каком значении $a$ предел суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $2a + a\sqrt{2} + a + \cdots$ равен 8.

**446.** Доказать, что во всякой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами, знаменатель которой не равен $\frac{1}{2}$, предел суммы всех ее членов более учетверенного второго члена.

(39, 1958)

**447.** Определить бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, в которой второй член равен 6, а сумма членов равна $\frac{1}{8}$ суммы квадратов членов.

(39, 1957)

**448.** Найти обыкновенную дробь, при обращении которой в десятичную получились бы следующие периодические дроби: 1) 0,3737. . .; 2) 0,23 (345).

(40, 1962)

**449.** Часовая и минутная стрелки часов показывают полночь. В котором часу стрелки часов встретятся снова?

(40, 1962)

**450.** Доказать, что сумма чисел, обратных членам геометрической прогрессии, равна сумме всех членов прогрессии, деленной на произведение ее первого и последнего членов.

(39, 1955; 40, 1961)

**451.** Дана геометрическая прогрессия; выразить произведение всех ее членов через первый и последний члены.

(39, 1955; 40, 1961)

**452.** Дана геометрическая прогрессия; выразить произведение всех ее членов через сумму $S_n$ и через $S_n'$ — сумму обратных величин этих членов.

(40, 1961)

**453.** Доказать, что если три положительных числа $a$, $b$ и $c$ являются членами геометрической прогрессии, то имеет место равенство

$$\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N} \tag{1}$$

и обратно.

(40, 1960, 1966)

**454.** Доказать, что если $a$, $b$ и $c$ образуют геометрическую прогрессию, то

$$\frac{1}{\log_a N}, \quad \frac{1}{\log_b N} \text{ и } \frac{1}{\log_c N}$$

составляют арифметическую прогрессию.

(39, 1961)

**455.** Доказать, что если $a$, $b$ и $c$ одновременно являются 5-м, 17-м и 37-м членами как арифметической, так и геометрической прогрессии, то

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1.$$

(39, 1955)

**456.** Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 155, а сумма первых двух членов геометрической прогрессии

равна 9. Определить эти прогрессии, если первый член арифметической прогрессии равен знаменателю геометрической прогрессии, а первый член геометрической прогрессии равен разности арифметической прогрессии.

(40, 1962)

**457.** В некоторой арифметической прогрессии второй член является средним пропорциональным между первым и четвертым. Показать, что четвертый, шестой и девятый члены этой прогрессии образуют геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

(41, 1958)

**458.** Даны две прогрессии — арифметическая и геометрическая, у которых взято по три положительных члена, причем первый и последний члены у обеих прогрессий равные. Определить, для какой прогрессии сумма этих членов больше.

(36, 1947)

**459.** Три числа составляют одновременно арифметическую и геометрическую прогрессии. Найти зависимость между ними.

(25, 1940)

**460.** Найти условие, при котором три числа $a$, $b$ и $c$ были бы $k$-тым, $p$-тым и $m$-ым членами некоторой геометрической прогрессии.

(40, 1960)

**461.** Определить условие, при котором три числа $a$, $b$ и $c$ были бы членами одной и той же прогрессии, арифметической или геометрической.

(40, 1962)

**462.** Могут ли числа 11, 12 и 13 быть членами одной и той же геометрической прогрессии?

(40, 1962, 1966)

**463.** Могут ли быть членами одной и той же прогрессии (арифметической или геометрической) числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$?

(40, 1962)

**464.** Если к четырем числам, составляющим арифметическую прогрессию, прибавить соответственно 5, 6, 9 и 15, то получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

**465.** Если к четырем числам, составляющим кратную прогрессию, прибавить соответственно 4, 21, 29 и 1, то получим четыре числа, составляющих разностную прогрессию. Найти эти числа.

**466.** Сумма пяти членов арифметической прогрессии равна корню уравнения $8^{2x+1} = (0{,}125)^{4-3x}$, последний ее член равен пределу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \cdots$

Составить арифметическую прогрессию.

(12, 1958)

**467.** Сколько членов надо взять в бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$\div 8, 7\ldots$

для того, чтобы их сумма отличалась от предела суммы бесконечного числа ее членов меньше чем на 0,01.

**468.** Написать такую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, начинающуюся с 3, чтобы предел суммы ее членов равнялся $\frac{7}{2}$.

**469.** В арифметической прогрессии 11 членов; первый, пятый и одиннадцатый члены составляют геометрическую прогрессию. Написать все члены арифметической прогрессии, если первый член равен 24.

**470.** Между 3 и 19 683 вставить 7 членов геометрической прогрессии и 5-й член этой прогрессии разделить на 2 части пропорционально 4 и 5.

**471.** В арифметической прогрессии, содержащей 9 членов, первый член равен 1, а сумма равна 369. Геометрическая прогрессия содержит тоже 9 членов, причем первый и последний члены совпадают с членами данной арифметической прогрессии. Найти ее седьмой член.

**472.** Квадраты 12-го, 13-го и 15-го членов арифметической прогрессии образуют геометрическую прогрессию. Найти знаменатели этой геометрической прогрессии.

(40, 1966)

**473.** Имеются две прогрессии: арифметическая и геометрическая. Первый и третий члены арифметической прогрессии совпадают с первым и третьим членами геометрической, второй член арифметической прогрессии больше второго члена геометрической на 2, а четвертый меньше четвертого члена геометрической прогрессии на 14. Написать эти прогрессии.

**474.** Три положительных числа составляют геометрическую прогрессию. Если ко второму числу прибавить 8, эти числа составят арифметическую прогрессию; если затем к третьему числу прибавить 64, полученные числа вновь составят геометрическую прогрессию. Найти эти три числа.

(4, 1940)

**475.** Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если третий член уменьшить на 64, то полученные три числа составят арифметическую прогрессию. Если затем второй член этой прогрессии уменьшить на 8, то получится геометрическая прогрессия. Определить эти числа.

(39, 1958)

**476.** Составить такую бесконечно убывающую кратную прогрессию, у которой каждый член вдвое меньше суммы всех членов, следующих за ним. Известно еще, что пятый член этой прогрессии равен 16.

**477.** Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии при условии, что сумма ее первых шести членов составляет $\frac{7}{8}$ предела суммы всех членов.

**478.** Если числа $a^2$, $b^2$ и $c^2$ образуют арифметическую прогрессию, то числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ образуют также арифметическую прогрессию. Доказать.

(39, 1953; 30, 1958)

**479.** Найти все геометрические прогрессии, у которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих.

(40, 1951, 1966)

**480.** В квадрат, сторона которого равна $a$, вписан другой квадрат, а в него вписан третий и т. д. до бесконечности (рис. 1).

а) Вычислить предел суммы площадей всех этих квадратов.

в) Вычислить предел наименьшей суммы площадей квадратов, вписанных в данный квадрат.

(37, 1883; 40, 1966)

**481.** В равносторонний треугольник со стороной, равной $a$, вписан круг. В этот круг вписан равносторонний треугольник; в последний опять вписан круг и так до бесконечности. Вычислить суммы радиусов, длин окружностей и площадей всех кругов.

(40, 1960)

**482.** В круг радиуса $R$ вписан квадрат. В этот квадрат вписан круг, а в него вновь вписан квадрат и так до бесконечности. Вычислить предел, к которому стремится сумма длин радиусов всех этих кругов и сумма их площадей.

(16, 1907)

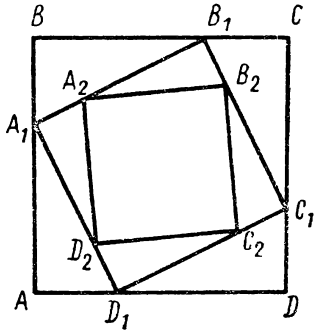



Рис. 1.

**483.** В прямую призму с квадратным основанием вписана другая, вершина которой лежит на серединах ребер оснований первой призмы; во вторую призму так же вписана третья, а в третью — четвертая и так до бесконечности. Найти предел суммы объемов всех призм, если ребро первой призмы равно $a$, а высота равна $h$.

**484.** Дан куб, ребро которого равно $a$; в него вписан шар. В шар вписан куб, в который вновь вписан шар и так до бесконечности. Вычислить пределы сумм: 1) объемов всех кубов; 2) объемов всех шаров.

**485.** Найти четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую, а последние три — арифметическую прогрессии; сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних — 12.

(37, 1875, 1878; 31, 1957)

**486.** Если первые два члена $a_1$ и $a_2$ арифметической прогрессии положительны, не равны между собой и совпадают с двумя первыми членами $u_1$ и $u_2$ геометрической прогрессии, то все члены арифметической прогрессии, начиная с $a_3$, меньше соответствующих членов геометрической прогрессии (теорема Я. Бернулли). Доказать.

**487.** Вычислить сумму $n$ членов арифметической прогрессии

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\cdots+\frac{1}{x}.$$

(12, 1958)

**488.** Вычислить сумму квадратов $n$ первых чисел натурального ряда, т. е.

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

(задача Архимеда).

(40, 1951; 39, 1961)

**489.** Вычислить сумму кубов $n$ первых чисел натурального ряда

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$$

и доказать, что эта сумма при любом натуральном $n$ есть квадрат целого числа.

(40, 1951, 1966)

**490.** Вычислить сумму четвертых степеней $n$ первых чисел натурального ряда

$$S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$$

(задача Ферма).

(40, 1966)

**491.** Просуммировать

$$S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + \cdots + na^{n-1}. \quad (1)$$

(40, 1951)

**492.** Вычислить сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}. \quad (1)$$

**493.** Вычислить сумму $n$ слагаемых

$$S_n = 1\cdot x + 2\cdot x^2 + 3\cdot x^3 + \cdots + kx^k + \cdots + nx^n.$$

(40, 1966)

**494.** Просуммировать

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\cdot n^2. \quad (1)$$

(39, 1957; 40, 1952, 1962)

**495.** Доказать тождество

$$\frac{1^4}{1\cdot 3} + \frac{2^4}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}.$$

(39, 1951)

**496.** Найти суммы

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \cdots + \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2;$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \cdots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2.$$

(39, 1951)

**497.** Доказать тождество

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

(39, 1951)

**498.** Найти сумму всех дробей вида

$$\frac{1}{(n+1)^{m+1}},$$

где $m$ и $n$ — натуральный ряд чисел: 1, 2, 3. . . (задача Гольдбаха).
(40, 1966)

**499.** Из таблицы

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 . . . . . | $k$ | . . . $n$ |
| $n+1$ | $n+2$ | $n+3$ . . . . . | $n+k$ | . . . $2n$ |
| $2n+1$ | $2n+2$ | $2n+3$ . . . . . | $2n+k$ | . . . $3n$ |
| $3n+1$ | $3n+2$ | $3n+3$ . . . . . | $3n+k$ | . . . $4n$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| $(n-1)n+1$ | $(n-1)n+2$ | $(n-1)n+3$ . . . | $(n-1)n+k$ | . . . $n^2$ |

выбраны $n$ чисел так, что никакие два из выбранных чисел не стоят в одной и той же строке или в одном и том же столбце таблицы. Вычислить сумму выбранных чисел.

(40, 1961)

**500.** Найти предел выражения

$$\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5}\ldots}}}}}$$

(40, 1952, 1962)

## § 10. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

### а) Основные свойства логарифмов

**501.** Доказать, что

$$\frac{\log_b N}{\log_a N}=\log_b a.$$

(40, 1952)

**502.** Доказать, что

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}.$$

(40, 1938, 1949, 1963, 1966)

**503.** Доказать, что

$$\log_a N = \log_{a^n} N^n.$$

(40, 1940)

**504.** Доказать, что

$$\frac{\log_a N}{\log_{ak} N} = 1 + \log_a k.$$

(1, 1950)

**505.** Доказать, что

$$\lg x = M \cdot \ln x,$$

где $M = \lg e = 0{,}43429\ldots$ — модуль десятичных логарифмов; $e = 2{,}71828\ldots$ — основание натуральных логарифмов.

(12, 1951)

**506.** Зная, что $\lg 2 = 0{,}301$, найти $\lg 5$.

(12, 1957)

**507.** Зная, что $\lg 2 = 0{,}301$, найти $\lg 125$.

**508.** Что больше: $\log_2 5$ или $\log_8 125$.

**509.** Зная, что $\log_{12} 2 = a$, найти $\log_6 16$.

(12, 1953)

**510.** Зная, что $\log_6 2 = a$, $\log_6 5 = b$, найти $\log_3 5$.

(12, 1952)

**511.** Дано $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.
Найти $\log_{35} 28$.

(39, 1952)

**512.** Доказать, что

$$\lg 2 = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \ldots \log_{10} 9.$$

**513.** Вычислить без таблиц
1) $7^{\log_7 3}$; 2) $343^{1-2\log_{49} 13}$.

**514.** Доказать, что

$$(\log_2 3)^{-1} + (\log_5 3)^{-1} > 2.$$

(39, 1955)

**515.** Доказать, что

$$\log_{\frac{1}{m}} \frac{1}{n} = \log_m n.$$

(12, 1961)

**516.** Дано

$$\log_a x = p,\ \log_b x = q \text{ и } \log_{abc} x = r.$$

Найти $\log_c x$.

(39, 1958)

**517.** Вычислить $\log_{ab}\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$,

если $\log_{ab} a = n$.

**518.** Упростить выражение, стоящее под знаком логарифма:

$$\log \sqrt[n]{\frac{a}{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt[-2]{\frac{a}{b}}}.$$

(3, 1928)

**519.** Доказать тождество

$$n = -\log_3\log_3\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}}_{n \text{ раз}}.$$

(40, 1961; 41, 1963)

**520.** Доказать, что при любых (положительных) значениях $a$ и $N$ имеет место равенство

$$\frac{1}{\log_a N}+\frac{1}{\log_{a^2} N}+\frac{1}{\log_{a^3} N}+\frac{1}{\log_{a^4} N}+\frac{1}{\log_{a^5} N}=15\log_N a.$$

(40, 1940)

**521.** Доказать, что

$$\log_{a_1\cdot a_2\cdot\ldots a_n} x=\frac{1}{\dfrac{1}{\log_{a_1} x}+\dfrac{1}{\log_{a_2} x}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{a_n} x}}.$$

(40, 1940)

**522.** Доказать тождество

$$\log_a N\cdot\log_b N+\log_b N\cdot\log_c N+\log_c N\cdot\log_a N=$$
$$=\frac{\log_a N\cdot\log_b N\cdot\log_c N}{\log_{abc} N}.$$

(1, 1950)

**523.** Доказать, что

$$\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_d c=\log_d a,$$

где $b\neq 1$, $c\neq 1$, $d\neq 0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$.

**524.** Доказать, что

$$\frac{1}{\log_2 N}+\frac{1}{\log_3 N}+\cdots+\frac{1}{\log_{1958} N}=\frac{1}{\log_{1958!} N}.$$

(39, 1959)

525. Найти $\log_{abc} x$, (39, 1959)

если $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ и $\log_c x = 6$.

(41, 1958)

526. Доказать, что

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a,$$

если $a$ и $b$ — длины катетов, $c$ — длина гипотенузы прямоугольного треугольника.

(40, 1949; 1, 1950)

527. Доказать, что

$$x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}},$$

если

$$y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}} \text{ и } z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}.$$

(41, 1958; 39, 1961; 40, 1963)

### б) Показательные уравнения

Решить следующие уравнения:

528. $4^{x+1} + 4^x = 320$. (34, 1936)

529. $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$. (34, 1936)

530. $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$. (30, 1958)

531. $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$. (21, 1935)

532. $5^x - 5^{3-x} = 20$.

533. $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$. (20, 1936)

534. $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81$. (20, 1936)

535. $49^x - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$. (30, 1958)

536. $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^x = 0$. (20, 1936)

537. $2\frac{1}{4} \cdot 4^{2x} - \frac{1}{2} \cdot 4^{4x} = 1$. (21, 1935)

538. $2^x + 12 \cdot 2^{-x} = 9{,}5$. (21, 1936)

539. $2^{3x}\cdot 3^{x}-2^{3x-1}\cdot 3^{x+1}=-288.$

540. $4^{x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}.$

(12, 1956)

541. $5^{2x-3}=2\cdot 5^{x-2}+3.$

(16, 1936)

542. $3^{x-5}+3^{x-7}+3^{x-9}=45{,}5+22{,}75+11{,}375+\cdots$

(12, 1958)

543. $0{,}5^{x^2-20x+61{,}5}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}.$

544. $\dfrac{3^{\sqrt[3]{x^2}}}{2\cdot 3^{\sqrt[3]{x-1}}}=1{,}5.$

545. $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}.$

546. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}=\sqrt[4]{1{,}5}.$

547. $5^{2+4+6+\cdots+2x}=0{,}04^{-28},$

e $x>0.$

(25, 1940; 6, 1958)

548. $2\cdot(2\sqrt{x}+3)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}-\sqrt[\sqrt{x}-1]{4^2}=0.$

(2, 1958)

549. $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}.$

(43, 1960)

550. $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6.$

(41, 1958)

551. $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{x}+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{x}=4.$

(39, 1951; 44, 1961; 50, 1963)

552. $4^{x}+6^{x}=9^{x}.$

(39, 1958)

553. $2^{3x}-\dfrac{8}{2^{3x}}-6\left(2^{x}-\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)=1.$

(35, 1961)

### в) Логарифмические уравнения

Решить следующие уравнения:

554. $\lg(0{,}5+x)=\lg 0{,}5-\lg x$.

(34, 1936)

555. $\lg(4{,}5-x)=\lg 4{,}5-\lg x$.

556. $\lg(x-9)+2\cdot\lg\sqrt{2x-1}=2$.

(21, 1935)

557. $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{2x-3}+1=\lg 30$.

(19, 1936)

558. $\lg\left(x-\frac{8}{9}\right)=2\lg\frac{1}{6}$.

(34, 1925)

559. $x^{\lg x}=100x$.

(31, 1936; 20, 1960)

560. $x^{\lg x-1}=100$.

(16, 1955)

561. $0{,}1\cdot x^{\lg x-2}=100$.

(16, 1955)

562. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$.

(31, 1957)

563. $(0{,}4)^{\lg^2 x+1}-(6{,}25)^{2-\lg x^3}=0$.

(40, 1953; 20, 1960)

564. $x^{2\log_x 10}=10x$.

(13, 1958)

565. $2^{\frac{3}{\log_3 x}}=\frac{1}{64}$.

566. $x^{\log_a x}=a^2 x;\ a>0$.

567. $x^{(2\lg^3 x-1{,}5\lg x)}=\sqrt{10}$.

(20, 1936; 44, 1961)

568. $\log_5(x^2-11x+43)=2$.

(34, 1935)

569. $\lg\left(8\cdot\sqrt[10]{2^{x^2-14{,}5x}}\right)=0$.

(21, 1936)

570. $\log\left(64\cdot\sqrt[24]{2^{x^2-40x}}\right)=0$.

(27, 1937; 39; 1958; 43, 1961)

571. $4-\lg x=3\sqrt{\lg x}$.

(16, 1936)

572. $\lg 10+\frac{1}{3}\lg\left(271+3^{\sqrt{2x}}\right)=2$.

(20, 1936; 12, 1956)

573. $\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\lg 5 - 1 + \lg x\right) = 1 - \lg 5.$

(16, 1955)

574. $\dfrac{\lg x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\lg 5 - 1}{\frac{1}{4}\lg(x-1)} = \lg 0{,}01$

(16, 1955)

575. $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1).$

(31, 1957; 6, 1958)

576. $\log_4(x + 12)\cdot\log_x 2 = 1.$

(1, 1939)

577. $\sqrt{\log_x \sqrt{3x}}\cdot\log_3 x = -1.$

(40, 1954, 1965, 1966)

578. $\sqrt[\lg x]{x} = 10^{x^4}\ (x > 0).$

579. $5\log_2 3 + 2\log_2\sqrt{(x-2)\sqrt{8}} - 1\frac{2}{3}\log_2 27 = 1{,}5.$

(13, 1958)

580. $\sqrt[-x]{0{,}125} = 3^{2-\log_3 18}$

(31, 1957)

581. $\lg\sqrt{75 + 5^{\sqrt[3]{x-1}}} = 1.$

582. Доказать, что

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

и, пользуясь этим соотношением, решить уравнение

$$\log_x 2 + \log_2 x = 2{,}5.$$

(40, 1952, 1963, 1966)

583. $\dfrac{\lg(35 - x^3)}{\lg(5 - x)} = 3$

(43, 1961)

584. $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}.$

(43, 1960)

585. $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5.$

(43, 1961)

586. $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5.$

(43, 1960)

587. $\lg 10^{\lg (x^2+21)} - 1 = \lg x.$

(43, 1961)

588. $\log_\pi \log_2 \log_7 x = 0.$

(41, 1957)

589. $2(\lg 2 - 1) + \lg\left(5^{\sqrt{x}} + 1\right) = \lg\left(5^{1-\sqrt{x}} + 5\right).$

(43, 1960; 35, 1961)

590. $2\lg 2 + \left(1 + \frac{1}{2x}\right)\lg 3 - \lg\left(\sqrt[x]{3} + 27\right) = 0.$

(43, 1960; 14, 1966)

591. $\log_x \sqrt{5} - \log_x 5x - 2\frac{1}{4} = (\log_x \sqrt{5})^2.$

(43, 1960; 35, 1961)

592. $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{3}{4}.$

(35, 1961)

593. $\frac{\log_2 x - 1}{\log_2 \frac{x}{2}} - 2\log_2 \sqrt{x} + \log_2^2 x = 3.$

(12, 1955; 44, 1961)

594. $2x^{\lg x} + 3x^{-\lg x} = 5.$

595. $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}.$

(41, 1958, 14, 1966)

596. $x^{\lg^2 x + \lg x^3 + 3} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+x}-1} - \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}}.$

(43, 1961)

597. $\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right) \cdot x^{0,5(\log_2 x^2)^2 - 7} = \frac{x^6}{2^{11}}.$

(41, 1957; 40, 1960)

598. $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1.$

(40, 1961)

599. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7.$

(6, 1958)

600. $\lg \lg x = \sqrt{\frac{(m+n)^{\lg(m-n)}}{(m-n)^{\lg(m+n)}}}.$

(8, 1927; 40, 1961, 1966)

**601.** $\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax} + } + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a.$

(1, 1950; 40, 1957; 13, 1958; 39, 1961)

**602.** Найти все значения параметра $k$, при которых уравнение

$$\log (kx) = 2 \log (x + 1)$$

имеет один и только один положительный корень.

(41, 1958; 40, 1961)

**603.** $\frac{\lg (x^2)}{(\lg x)^2} + \frac{\lg (x^3)}{(\lg x)^3} + \frac{\lg (x^4)}{(\lg x)^4} + \cdots = 8.$

(39, 1957)

### г) Системы уравнений

Решить следующие системы уравнений:

**604.** $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y} + 2 = 0 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y+1} - 16 = 0. \end{cases}$

(20, 1936)

**605.** $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3} \\ (x + y) \cdot 2^{y-x} = 3. \end{cases}$

(35, 1961; 41, 1963)

**606.** $\begin{cases} \sqrt[x]{a}\ \sqrt[y]{a^{-1}} = 1 \\ \sqrt[x]{bn} : \sqrt[y]{b} = n^p. \end{cases}$

**607.** $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7 \\ \lg x + \lg y = 5. \end{cases}$

(20, 1936)

**608.** $\begin{cases} \lg x + \lg y = a \\ 2 \lg x - 2 \lg y = b. \end{cases}$

(31, 1936)

**609.** $\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 2 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

(31, 1936)

**610.** $\begin{cases} \lg x + \lg y = 2 \\ x^2 + y^2 = 425. \end{cases}$

**611.** $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5. \end{cases}$

**612.** $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y. \end{cases}$

**613.** $\begin{cases} x^{y+1} = 27 \\ x^{2y-5} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

(40, 1932; 6, 1958)

**614.** $\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7. \end{cases}$

(40, 1950; 1964, 1966; 14, 1966)

**615.** $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^m = y^n, \end{cases}$

где $m \neq n$.

(50, 1963)

**616.** $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3, \end{cases}$

где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

(16, 1936; 14, 1966)

**617.** $\begin{cases} x^y = y^x \\ a^x = b^y, \end{cases}$

где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; $a \neq b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

(40, 1951; 11, 1955)

**618.** $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^3 = y^2. \end{cases}$

(43, 1961)

**619.** $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 40 \\ 64^{x+y} = 12. \end{cases}$

(39, 1958)

**620.** $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

(39, 1951)

621. $\begin{cases} x^y = 243 \\ \sqrt[y]{1024} = \left(\frac{2}{3}x\right)^2. \end{cases}$

(43, 1961)

622. $\begin{cases} \left[\left(\sqrt[9]{5}\right)^{2x}\right]^{3y} = 5^8 \\ [7777^{(x-y-1)}]^{x^2+6y^2-60} = 1. \end{cases}$

(40, 1961)

623. $\begin{cases} 10^{2-\lg(x-y)} = 25 \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 1 + 2\lg 2. \end{cases}$

(40, 1961)

624. $\begin{cases} (mx)^{\lg m} = (ny)^{\lg n} \\ n^{\lg x} = m^{\lg y}. \end{cases}$

(3, 1928; 40, 1960, 1966)

625. $\begin{cases} 10^{3-\lg(x-y)} = 250 \\ \sqrt{x-y} + \frac{1}{2}\sqrt{x+y} = \frac{26-y}{\sqrt{x-y}}. \end{cases}$

(40, 1950)

626. $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 32 \\ \lg(x-y)^2 - 2\lg 2 = 0. \end{cases}$

(20, 1935)

627. $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) - 1 = \lg 13 \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = 3\lg 2. \end{cases}$

(21, 1936)

628. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12, \end{cases}$

где $x > 0$, $y > 0$.

(25, 1940)

629. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases}$

(1, 1950; 11, 1955)

630. $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \dfrac{8}{3} \\ xy = 16, \end{cases}$

где $x > 0$, $y > 0$.

(11, 1955)

631. $\begin{cases} 5\,(\log_y x + \log_x y) = 26 \\ xy = 64. \end{cases}$

(1, 1950; 11, 1955)

632. $\begin{cases} \dfrac{\lg(x-y) - 2\lg 2}{1 - \lg(x+y)} = 1 \\ \dfrac{\lg x - \lg 3}{\lg y - \lg 7} = -1. \end{cases}$

(20, 1936)

633. $\begin{cases} \lg xy = 2\lg a + 2\lg b + \lg\left(2 + \dfrac{3a}{b}\right) \\ \lg x - \lg y = 2\lg a + 3\lg b - \lg(2a + 3b). \end{cases}$

(40, 1950)

634. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_8 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$

(24, 1939; 11, 1955)

635. $\begin{cases} \log_a x + \log_a y + \log_a 4 = 2 + \log_a 9 \\ x + y - 5a = 0. \end{cases}$

(24, 1939; 6, 1958)

636. $\begin{cases} x^m = y^n \\ \log_p \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_p x}{\log_p y}. \end{cases}$

(2, 1958)

## § 11. СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

637. Найти такое число $k$, чтобы число сочетаний из $n$ элементов по $k$ было наибольшим ($k \leqslant n$).

(40, 1956)

638. На плоскости даны $n$ точек, расположенных так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько различных прямых можно провести через эти точки?

**639.** На плоскости дано $n$ точек, соединенных всевозможными способами посредством неограниченных прямых линий, причем никакие две из этих прямых не параллельны между собой и никакие три не пересекаются в одной точке. Вычислить число $N$ таких точек пересечения, не включая $n$ заданных точек.

(39, 1964)

**640.** Состоялся шахматный турнир, в котором приняли участие несколько шахматистов, причем каждый из них сыграл с остальными по одной партии. Всего состоялось 45 партий. Сколько было шахматистов?

(7, 1952)

**641.** Из пятнадцати солдат необходимо отправить троих в разведку. Сколькими способами можно сделать выбор?

**642.** Из отряда солдат в 50 чел. ежедневно назначают в караул 4 чел. Сколько раз караул может быть составлен различным образом, и сколько раз одному и тому же солдату пришлось бы быть в карауле?

(37, 1882)

**643.** Доказать, что

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} = C_{m-2}^n + 2C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2}.$$

(40, 1952, 1964)

**644.** Доказать, что

$$1 - 10C_{2n}^1 + 10^2C_{2n}^2 - 10^3C_{2n}^3 + \cdots - 10^{2n-1}C_{2n}^1 + 10^{2n} = 81^n.$$

(40, 1956, 1964, 1966)

**645.** Найти 5-й член разложения бинома

$$\left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{a}\right)^n,$$

если отношение коэффициента 3-го члена ко 2-му равно $\frac{11}{2}$.

(37, 1946)

**646.** В разложении бинома

$$(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^n$$

коэффициент 3-го члена разложения равен 28. Найти средний член разложения.

(37, 1946)

**647.** Найти 4-й член разложения

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{b-a} + \sqrt[3]{\frac{b^2-a^2}{a}}\right)^n,$$

если коэффициент 3-го члена равен 21.

**648.** Чему равна степень $n$, в которую необходимо возвысить $a + x$, чтобы коэффициент при $x^6$ равнялся числу $\frac{103}{217}$.

(40. 1961)

**649.** В разложении

$$(1 + x)^n$$

найти значение показателя $n$, если известно, что коэффициент пятого члена равен коэффициенту девятого члена.

**650.** Найти наименьшее значение показателя $m$ в разложении

$$(1 + x)^m,$$

при котором отношение двух соседних коэффициентов разложения равнялось бы отношению 7 : 15.

(3, 1927; 40, 1962)

**651.** В разложении бинома

$$\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{y}{x}\right)^n$$

определить член разложения бинома, не содержащий букву $x$, если биномиальный коэффициент 3-го члена разложения на 5 больше биномиального коэффициента 2-го члена разложения.

(37, 1946)

**652.** В разложении бинома

$$\left(a\sqrt[5]{\frac{a}{3}} - \frac{b}{\sqrt[7]{a^8}}\right)^n$$

определить член, содержащий букву $a$ в 3-й степени, если сумма биномиальных коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах в разложении бинома, равна 2048.

(37, 1946)

**653.** В разложении бинома

$$\left(\frac{a\sqrt[3]{a}}{b} + \frac{1}{\sqrt[15]{a^{28}}}\right)^n$$

определить член разложения, не содержащий букву $a$, если сумма биномиальных коэффициентов трех первых членов разложения равна 79.

(37, 1946)

654. В разложении бинома

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}-\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{a^3}}\right)^n$$

определить член разложения, содержащий $b^6$, если отношение биномиального коэффициента 4-го члена разложения к биномиальному коэффициенту 2-го члена равно 187.

(37, 1946)

655. Найти члены, не содержащие иррациональности в разложении бинома

$$\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5.$$

656. При каком значении $n$ коэффициенты 2-го, 3-го и 4-го членов разложения бинома

$$(x+y)^n$$

составляют арифметическую прогрессию.

657. Найти все рациональные члены в разложении бинома

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{12}.$$

658. Найти три последовательных коэффициента бинома, составляющих арифметическую прогрессию.

659. Вычислить с точностью до 0,001

$$1{,}0005^{36}.$$

(12, 1954)

660. Разложить по формуле бинома Ньютона

$$(a+bi)^6+(a-bi)^6.$$

661. Найти бином Ньютона, который в разложении дает такие четыре последовательных члена: 280, 560, 672 и 448.

(12, 1956)

662. В разложении бинома

$$\left(\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}\right)^n$$

найти 5-й член, если коэффициент 3-го члена равен 78.

(12, 1957)

663. В разложении бинома

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt{a^{-1}}\right)^{15}$$

найти член, не зависящий от $a$.

664. Найти члены, не содержащие иррациональности в разложении

$$\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2}\right)^{24}.$$

(16, 1899)

665. В разложении бинома

$$\left(a^2\sqrt[3]{a}-\frac{2}{a^2\sqrt{a}}\right)^n$$

вычислить член разложения, не содержащий буквы $a$, если биномиальный коэффициент 5-го члена разложения относится к биномиальному коэффициенту 3-го члена разложения как 1 : 2.

(37, 1949)

666. В разложении бинома

$$\left(p\sqrt[4]{p}-\frac{1}{\sqrt[8]{p^5}}\right)^n$$

определить член разложения, не содержащий букву $p$, если сумма биномиальных коэффициентов 2-го члена от начала и 3-го члена от конца разложения равна 78.

(37, 1949)

667. Сколько рациональных членов содержится в разложении

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}.$$

(39, 1952, 1957, 1961)

668. Определить, какой член в разложении бинома

$$\left(\sqrt[4]{a^2x}+\sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}}\right)^{13}$$

не содержит $x$.

(38, 1952; 12, 1961)

669. В разложении бинома

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$$

первые три коэффициента образуют арифметическую прогрессию. Найти все рациональные члены разложения.

(40, 1961)

670. Найти $x$, если известно, что третий член разложения бинома

$$(x+x^{\lg x})^5$$

равен 1 000 000.

(41, 1958)

**671.** Найти коэффициент при $x^{4p+3}$ в разложении бинома

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{2n+1}.$$

(40, 1962, 1965)

**672.** Найти сумму квадратов коэффициентов бинома Ньютона.

(9, 1927; 40, 1961)

**673.** Вычислить коэффициенты при $x^{n-1}$ и $x^{n-2}$ в произведении

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2^2}\right)\left(x+\frac{1}{2^3}\right)\ldots\left(x+\frac{1}{2^n}\right).$$

(3, 1928; 40, 1962)

**674.** Доказать, что в разложении бинома

$$(1+i)^{4k+2}$$

сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна нулю.

(9, 1927)

## § 12. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

**675.** Произвести указанные действия:

$$\frac{\left(7\frac{37}{72} - 5\frac{43}{96}\right)\cdot 1\frac{11}{24} + \left(15{,}9 - 13\frac{13}{20}\right)\cdot\frac{8}{9}}{\left(\frac{3}{4}\cdot 0{,}4 + 24{,}15 : 2{,}3 - 10\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{5}{16}}.$$

(37, 1948)

**676.** Найти число, 7,5% которого равны выражению:

$$\frac{\left(8\frac{7}{55} - 6\frac{17}{110}\right)\cdot 1\frac{3}{217}}{\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{20}\right) : 1\frac{7}{8}}.$$

(36, 1948)

**677.** Выполнить указанные действия:

$$\frac{210{,}084 : 12{,}3 - 53\frac{23}{25} : 4 - 8\frac{1}{7}\cdot 9\frac{9}{19}\cdot\frac{11}{120}}{\left(11\frac{3}{4} - 24{,}2 : 3\frac{3}{5} - 4\frac{11}{42}\right) : 3\frac{4}{63} + 2{,}35\cdot\frac{45}{47}}$$

и убедиться, что полученный результат меньше

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}.$$

(37, 1949)

Вычислить:

**678.** $1{,}7 : \dfrac{(4{,}5 \cdot 1{,}(6) + 3{,}75) \cdot \dfrac{296}{4995}}{\dfrac{5}{9}} - 0{,}41\,(6).$

(36, 1950)

**679.** $\left[6{,}2 + 3\frac{9}{16} \cdot \left(\frac{2{,}75}{14 : \frac{2}{7} - 2{,}5 : \frac{1}{18}} - \frac{7}{24}\right)\right] : 12{,}(6).$

**680.** $7\frac{1}{2} + 6{,}8\,(3) + 5{,}(6) + \dfrac{13{,}75 + 12\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 0{,}0625} - \dfrac{\frac{2}{9} + 3{,}6\,(1)}{1{,}91\,(6) - 1\frac{5}{6}}.$

(16, 1957)

**681.** $\left[\dfrac{\left(0{,}805 : 10 - 0{,}00705 \cdot 10 + 2\frac{1}{3} : 50\right) \cdot \frac{5}{17}}{18{,}5 - \sqrt{272{,}25} : 1{,}125} + 1\frac{5}{16}\right] : \frac{127}{144}.$

(33, 1958)

Найти $x$ из равенств:

**682.** $\left[1{,}7 : \left(1\frac{2}{3} \cdot x - 3{,}75\right)\right] : \frac{8}{25} = 1\frac{5}{12}.$

(39, 1961)

**683.** $\left\{13 \cdot \frac{8}{9} - \left[\dfrac{11\frac{1}{10}}{\left(4\frac{3}{4} + x\right)\frac{4}{11}} - 2\frac{7}{15}\right] \cdot \frac{181}{222}\right\} : 1\frac{1}{24} = 3\frac{1}{3}.$

(39, 1953)

**684.** Периодические дроби: а) 0,3333. . ., в) 0,2 (7) — обратить в обыкновенные.

(40, 1966)

**685.** В какой системе счисления верны следующие равенства:

а) $4 \cdot 13 = 100$;

б) $3 \cdot 35 = 111$;

в) $5 \cdot 36 = 114$.

**686.** Узнать, по какой системе счисления написаны числа 722 и 554, если разность между ними по десятичной системе равна 133.

**687.** В какой системе счисления справедливо равенство

$$121 - 111 - 101 = 100^2 + 10^2.$$

(40, 1962, 1963, 1964, 1966)

**688.** Число $1236_{10}$ записать по пятеричной системе счисления.

**689.** Число $134_9$ выразить по троичной системе счисления.

**690.** Три неизвестные цифры, написанные рядом, выражают: 1) в шестеричной системе нумерации число, в 8 раз большее суммы двух правых цифр; 2) в семеричной — число, равное 9 раз взятой сумме всех его цифр; 3) в восьмеричной — число, равное 20 раз взятой сумме двух левых цифр. Какое число выражают эти цифры в десятичной системе счисления?

(40, 1961)

**691.** Найти двузначное число, которое равно сумме куба числа его десятков и квадрата числа его единиц.

(39, 1958)

**692.** Найти трехзначное число, квадрат которого равен пятой степени суммы его цифр.

(39, 1953)

**693.** Будет ли дробь 0,12345678910111213141516. . . периодической (после нуля написаны подряд все целые числа)?

(39, 1948, 1950)

**694.** Четырем бригадам рабочих была уплачена сумма, процентные деньги с которой за 16 мес. по 3% годовых составили бы 49 р. 20 коп. Первая бригада, в которой было 13 чел., работала 4 дня; вторая, из 11 чел., работала 5 дней; третья, из 8 чел., — 6 дней и четвертая, из 10 чел., — 6 дней. Сколько денег получила каждая бригада?

(15, 1936)

**695.** Разделить число 42 000 на такие четыре части, чтобы первая относилась ко второй, как 2 : 3, вторая к третьей, как 4 : 5, третья к четвертой, как 6 : 7.

(37, 1875)

**696.** В одном здании помещаются два учреждения и платят за аренду 400 руб. в месяц. Сколько платит каждое учреждение, если одно занимает здание от 9 час. до 15 час. 30 мин., а второе — от 17 час. 30 мин. до 23 час.

(12, 1954)

**697.** В кратчайший срок требуется изготовить 12 800 комплектов рабочей одежды. Заказ поручен трем фабрикам: A, B и C. Фабрика A может сделать в четыре дня 800 компл., фабрика B — в шесть дней 720 компл., а фабрика C в два дня приготовляет 40% того количества, которое могут приготовить в течение трех дней первая и вторая фабрики вместе. Через сколько дней заказ будет готов и по скольку комплектов будет сделано каждой фабрикой?

(37, 1878; 12, 1951)

**698.** Мне теперь вдвое больше лет, чем было вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам теперь; когда вам будет столько лет, сколько мне теперь, то сумма наших возрастов будет равна 63. Сколько лет каждому в данный момент?

(39, 1949, 1958)

**699.** Можно ли ходом коня из нижнего левого угла шахматной доски попасть в правый верхний, побывав на каждом поле только один раз.

(39, 1956)

**700.** На базар пошли Иван, Петр и Сергей с женами Анной, Екатериной и Марией. Каждый платил за купленную вещь столько рублей, сколько вещей купил. Каждый муж уплатил за свои вещи на 63 р. больше, чем его жена. Иван купил на 23 вещи больше Анны, Петр на 11 вещей больше, чем Екатерина. Кто на ком женат?

(39, 1949, 1957, 1959)

**701.** Вычислить сумму

$$\frac{1}{C_{100}^0}-\frac{1}{C_{100}^1}+\frac{1}{C_{100}^2}-\frac{1}{C_{100}^3}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{C_{100}^{98}}-\frac{1}{C_{100}^{99}}+\frac{1}{C_{100}^{100}}.$$

(39, 1965)

**702.** Показать, что для того, чтобы дробь

$$\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1} \tag{1}$$

имела значение, не зависящее от $x$, необходимо и достаточно соблюдение условия

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}.$$

(40, 1952, 1966)

**703.** Доказать, что произведение $n$ положительных множителей, сумма которых задана, достигает наибольшего значения, когда все эти множители равны между собой.

(40, 1955)

**704.** Найти наибольшее значение выражения

$$\log_2^4 x+12\log_2^2 x\cdot\log_2\frac{8}{x},$$

если $1<x<64$.

(11, 1956; 40, 1957)

**705.** Известно, что

$$x_1 = \sqrt{2},$$
$$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},$$
$$x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(40, 1955, 1965)

**706.** Решить уравнения:

$$\log_2 \log_2 \log_2 x = 0.$$

(40, 1955)

**707.** $\log_2 \log_3 \log_4 \log_5 x = -\infty$.

(40, 1952)

**708.** $x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \sin^2 \frac{\pi}{4}$,

если $|x| \leqslant 1$.

(40, 1955)

**709.** Доказать, что если алгебраическое уравнение $n$-ой степени с целыми коэффициентами имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена.

(40, 1966)

**710.** Найти уравнение, все корни которого обратны корням уравнения

$$10!x^{10} + 9!x^9 + \cdots + 2!x^2 + x = 100!$$

(40, 1962)

**711.** Найти сумму десяти слагаемых $\frac{1}{10\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 12} + \frac{1}{12\cdot 13} + \ldots$, не прибегая к приведению дробей к общему знаменателю.

**712.** Найти сумму

$$\frac{2}{5\cdot 7} + \frac{2}{7\cdot 9} + \frac{2}{9\cdot 11} + \cdots + \frac{2}{59\cdot 61}.$$

(40, 1965, 1966)

**713.** Найти наименьшее натуральное число, обладающее следующими свойствами:

1) его запись в десятичной системе счисления оканчивается цифрой 6;

2) если переставить цифру 6 из конца числа в его начало, то полученное число будет в 4 раза больше данного.

(39, 1962, 1966)

**714.** Найти все целые числа $n$, для которых сумма

$$1! + 2! + 3! + \cdots + n!$$

является полным квадратом.

(40, 1957)

# Часть II

# ГЕОМЕТРИЯ

## § 13. ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

715. По трем сторонам треугольника $a$, $b$ и $c$ вычислить его медианы.

(20, 1907; 40, 1950, 1966)

716. Которая из трех медиан треугольника наибольшая (наименьшая)?

(12, 1952)

717. По трем медианам треугольника $ABC$ $m_a$, $m_b$, $m_c$ вычислить стороны треугольника $a$, $b$ и $c$.

(12, 1910; 6, 1958)

718. Найти отношение суммы квадратов медиан треугольника к сумме квадратов его сторон.

719. По трем сторонам треугольника $a$, $b$ и $c$ вычислить его высоты.

720. Возможен ли треугольник, у которого высоты равны: $h_b = 2$, $h_a = 3$, $h_c = 4$.

(16, 1908; 12, 1957)

721. Квадрат биссектрисы угла при вершине треугольника равен разности между произведением боковых сторон и произведением отрезков основания. Доказать.

(40, 1950; 2, 1963)

722. По трем сторонам треугольника $a$, $b$ и $c$ вычислить длину биссектрисы $\beta_A$.

(15, 1907; 16, 1908)

723. Катеты прямоугольного треугольника равны $a$ и $b$. Вычислить длину биссектрисы прямого угла.

(52, 1965)

724. По двум сторонам треугольника $a$ и $b$ вычислить третью сторону, если медианы данных сторон пересекаются под прямым углом.

(12, 1952)

725. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла является одновременно биссектрисой угла между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла.

(46, 1961; 39, 1962)

726. В треугольнике даны две стороны $a$ и $b$ и известно, что сумма высот, опущенных на эти стороны, равна третьей высоте. Вычислить третью сторону $c$.

(36, 1948)

727. Одним раствором циркуля разделить прямую на любое число равных частей (задача Н. Тартальи).

(40, 1961, 1965)

728. Разрезать данный треугольник на три части, из которых можно было бы составить прямоугольник.

(40, 1953)

729. Разрезать данный треугольник (многоугольник) на равнобедренные треугольники.

(40, 1953)

730. Доказать, что всякий треугольник можно разрезать на четыре части и сложить из них два треугольника, подобных первоначальному.

(40, 1956)

731. В равностороннем треугольнике $ABC$ со стороной, равной $a$, провести прямую, которая пересечет боковые стороны $AB$ и $BC$ в точках $K$ и $N$, а продолжение стороны $AC$ в точке $M$ так, чтобы треугольник $KNB$, треугольник $NCM$ и четырехугольник $AKNC$ были равновелики.

(40, 1952)

732. Среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, найти имеющий наименьший периметр.

(40, 1962)

733. На берегу реки надо построить водокачку так, чтобы из нее по прямым трубам подавать воду пунктам A и B. Где надо строить водокачку, чтобы сумма длин водопроводов от нее до пунктов A и B была наименьшей.

(39, 1958)

734. На биллиардном столе $ABCD$, длина которого равна $a$, ширина $b$, лежит шар $L$ на расстоянии $a'$ от одного из бортов и на расстоянии $b'$ от другого. Определить на линии $DC$ точку $K$, в которой шар должен удариться о борт, чтобы, отскочив, попасть в лузу $B$ (аналогично — в лузу $C$).

735. Два предмета $P$ и $Q$ замечены с судна в одно и то же время на линии, наклоненной под углом 15° к востоку от северного направления, в котором оно шло. В то же мгновение судно переменило направление и пошло прямо на северо-запад. Когда в этом направлении было пройдено 5 *км*, те же предметы были видны: $P$ на восток и $Q$ на северо-восток. Определить расстояние между $P$ и $Q$.

(37, 1898)

**736.** Доказать, что прямые, соединяющие вершины параллелограмма с серединами сторон, сходящихся в противоположной вершине, рассекают диагональ, соединяющую две другие вершины, на три равные части.

(12, 1954)

**737.** В параллелограмме даны: одна сторона, равная $b$, и две диагонали $d_1$ и $d_2$. Найти его периметр, полагая, что $b = 58$ *см*, $d_1 = 89$ *см* и $d_2 = 52$ *см*.

(37, 1876)

**738.** Доказать, что биссектрисы углов любого четырехугольника образуют четырехугольник, который может быть вписан в окружность.

(40, 1952, 1964, 1965)

**739.** Вычислить диагонали вписанного четырехугольника, стороны которого равны $a$, $b$, $c$ и $d$.

(36, 1948)

**740.** Разность между длиной диагонали и длиной стороны квадрата приближенно равна 6 *м*. Вычислить длину сторон квадрата и радиус описанной окружности (ограничиваясь тремя десятичными знаками).

(37, 1874)

**741.** Провести прямую параллельно основанию треугольника $ABC$ так, чтобы получилась трапеция с периметром, равным $2p$.

(40, 1961)

**742.** Вычислить диагонали правильного пятиугольника, у которого сторона равна $a$.

(20, 1907; 40, 1960)

**743.** По сторонам треугольника, длины которых $a$, $b$ и $c$, найти расстояния ортоцентра от вершин.

(40, 1952)

**744.** В прямоугольном треугольнике дан катет $a$ и радиус $r$ вписанной в него окружности. Вычислить гипотенузу $c$ и второй катет $b$.

(36, 1948)

**745.** Вычислить катеты прямоугольного треугольника по радиусу вписанного круга $r$ и гипотенузе $c$.

(20, 1936)

**746.** Вычислить стороны равнобедренного треугольника по высоте $h$ и радиусу вписанного круга $r$.

**747.** Вычислить стороны равнобедренного треугольника по радиусам его вписанной и описанной окружностей $r$ и $R$ ($r = 3$, $R = 8$).

(40, 1968)

748. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 *см* и 4 *см*. Найти расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей.

(36, 1949)

749. Доказать, что во всяком треугольнике точки, симметричные с точкой пересечения высот относительно трех сторон треугольника, лежат на описанной окружности.

(40, 1953)

750. В круг, радиус которого равен $R$, вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Определить $R_1$ — радиус окружности, описанной около квадрата.

(37, 1879)

751. Дан треугольник $ABC$ со сторонами $a$, $b$ и $c$. Вычислить радиус описанного круга.

(40, 1961)

752. На диаметре $AB$ полукруга $ANB$ построен прямоугольник, высота которого $AC$ равна стороне вписанного в круг квадрата. Если соединить вершины $C$ и $D$ с произвольной точкой $N$ полукруга прямыми $CN$ и $DN$, пересекающими диаметр в точках $E$ и $L$, то

$$AL^2 + BE^2 = AB^2$$

(задача Ферма). Доказать.

(40, 1961, 1964, 1965)

753. Доказать, что в четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей (теорема Птоломея).

(39, 1957; 40, 1960)

754. В равносторонний треугольник вписаны три равных круга так, что каждый касается двух сторон треугольника и двух других кругов. Определить радиус этих кругов, если сторона треугольника равна $a$.

(15, 1936)

755. По данному радиусу $r$ и хордам $a$ и $b$ двух дуг круга определить хорду суммы (и разности) этих дуг.

(40, 1953)

756. Вычислить сторону правильного вписанного 15-угольника.

(15, 1906; 16, 1907; 40, 1960)

757. Доказать, что сторона правильного вписанного десятиугольника равна большему отрезку радиуса, разделенного в среднем и крайнем отношении.

(40, 1960)

758. Вычислить радиус окружности, описанной около правильного пятиугольника, сторона которого равна $a$.

(20, 1907; 40, 1960)

**759.** В равнобочной трапеции отношение оснований равно 0,75; средняя линия трапеции равна ее высоте $h$ и равна 7 *м*. Вычислить радиус окружности, описанной около трапеции.

(36, 1948)

**760.** На основании равнобедренного треугольника, как на хорде, построена окружность, касательная к равным сторонам треугольника. Найти радиус окружности, если основание треугольника $a$ и высота $h$.

(36, 1948)

**761.** Около круга описана равнобедренная трапеция, у которой средняя линия равна $m$. Определить периметр трапеции и длину ее боковой стороны.

(40, 1939)

**762.** Даны две концентрические окружности. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки, взятой на одной окружности, до концов диаметра другой есть величина постоянная.

(36, 1949)

**763.** По трем медианам треугольника $m_a$, $m_b$ и $m_c$ вычислить его площадь.

(16, 1908; 40, 1952)

**764.** Найти отношение площади данного треугольника со сторонами $a$, $b$ и $c$ к площади треугольника, у которого стороны являются медианами $m_a$, $m_b$ и $m_c$ данного треугольника.

(12, 1953)

**765.** По трем высотам треугольника $h_a$, $h_b$ и $h_c$ вычислить его площадь.

(16, 1907; 40, 1950)

**766.** Вычислить площадь треугольника по двум сторонам $a$ и $b$ и биссектрисе угла между ними $\beta_c$.

(16, 1907)

**767.** По двум сторонам треугольника $b$ и $c$ и биссектрисе угла между ними $\beta_A$ вычислить отрезки третьей стороны и его площадь ($b = 20$, $c = 45$, $\beta_A = 24$).

**768.** Один из катетов прямоугольного треугольника равен 8 *м*, другой 6 *м*; из вершины прямого угла опущен перпендикуляр на гипотенузу. Узнать величину этого перпендикуляра и площадей образовавшихся двух малых треугольников.

(37, 1874)

**769.** Основание треугольника равно $a$. Определить длину прямой, параллельной основанию и делящей площадь треугольника пополам ($a = 16$ *см*).

**770.** Высота остроугольного треугольника равна 25 *см*. На каком расстоянии от вершины нужно провести прямую, перпендикулярную этой высоте, чтобы площадь треугольника разделить пополам?

(37, 1875; 36, 1948)

771. Определить сторону ромба, зная, что площадь его равна $Q$, а отношение диагоналей равно $m : n$ ($Q = 80$; $m : n = 0{,}8$).

(37, 1878)

772. Периметр ромба равен 2 *м*; длины диагоналей его относятся, как 3 : 4. Вычислить площадь ромба.

773. В ромбе $ABCD$, диагонали которого $d_1 = 15$ *м* и $d_2 = 20$ *м*, из вершины $C$ тупого угла проведены две высоты: $CE$ и $CF$. Вычислить площадь $AECF$.

774. Диагонали ромба относятся как 3 : 4. Определить отношение площади ромба к площади круга, вписанного в ромб.

(12, 1958; 17, 1958)

775. В квадрате со стороной $a$ середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Вычислить площадь полученного треугольника.

(36, 1948)

776. Дан квадрат со стороной, равной $a$; если на двух противоположных сторонах этого квадрата построить внутри него два правильных треугольника, то боковые стороны треугольников пересекутся и образуют четырехугольник. Определить вид полученного четырехугольника и вычислить его углы, стороны и площадь.

(16, 1907; 12, 1958)

777. Доказать, что линия, соединяющая точку пересечения боковых сторон трапеции с точкой пересечения ее диагоналей, делит основания трапеции пополам.

(39, 1961)

778. В равнобедренной трапеции средняя линия равна $m$, а диагонали взаимно перпендикулярны. Вычислить площадь трапеции.

(36, 1948)

779. Длины оснований трапеции равны $a$ и $b$. Найти длину отрезка прямой, параллельной основаниям трапеции и делящей ее на две равновеликие фигуры ($a \geqslant b$).

(2, 1958; 6, 1958)

780. Вычислить площадь равнобочной трапеции, описанной около окружности радиуса $r$, зная ее боковую сторону, равную $c$.

781. Вычислить площадь равностороннего треугольника по разности между стороной и высотой, равной $d$.

(37, 1875)

782. Вычислить площадь прямоугольной трапеции, если даны: острый угол, равный 60°, и оба основания, соответственно равные $a$ и $b$ ($a \geqslant b$).

(16, 1907)

783. Вычислить площадь трапеции по четырем ее сторонам: $a$, $b$, $c$ и $d$.

(37, 1875; 16, 1908)

784. Внутри треугольника $ABC$ взята произвольная точка $K$ и через нее проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник $ABC$ на шесть частей, из которых три части являются треугольниками. Площади этих треугольников равны $S_1$, $S_2$ и $S_3$.

Вычислить площадь треугольника $ABC$.

(13, 1958)

785. Точка $M$ внутри круга радиуса $R$ удалена от центра на расстояние, равное $a$. Через $M$ проведены диаметр и две взаимно перпендикулярные хорды, одна из которых образует с диаметром угол $\alpha = 45°$. Вычислить площадь вписанного в круг четырехугольника, имеющего эти хорды диагоналями.

786. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна 9 *см*. Вычислить площадь квадрата, вписанного в ту же окружность.

(36, 1947)

787. Вычислить площади квадрата и правильных треугольника и шестиугольника, вписанных в круг радиуса $R$ (а также их отношения).

(37, 1874)

788. Вычислить длину сторон прямоугольника, если известны их отношение и площадь (задача из Московского папируса).

(40, 1961)

789. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию; площадь его равна $\frac{3}{5}$ площади равностороннего треугольника с тем же периметром. Найти отношение сторон данного треугольника.

(39, 1958; 40, 1962)

790. Какой из треугольников с одним и тем же периметром, равным $2p$, и с одним и тем же основанием, равным $a$, будет иметь наибольшую площадь?

(40, 1962)

791. Какой из прямоугольников с одним и тем же периметром, равным $2p$, имеет наибольшую площадь?

(40, 1962, 1965)

792. В треугольнике $ABC$ провести прямую $A_1B_1 \parallel AB$ так, чтобы площадь прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ была наибольшей.

793. Показать, что из прямоугольников одинакового периметра квадрат имеет наибольшую площадь.

(40, 1961)

**794.** Найти треугольники Герона, длины сторон которых — последовательные целые числа.

(40, 1962)

**795.** По стороне правильного пятиугольника, равной $a$, определить его площадь.

(16, 1906; 20, 1907; 40, 1950)

**796.** Вычислить площадь трапеции по разности оснований $d$ и двум непараллельным сторонам $a$ и $b$, если известно, что в трапецию можно вписать круг.

(15, 1957)

**797.** Гипотенуза прямоугольного треугольника, длина которой равна $c$, разделена в крайнем и среднем отношении перпендикуляром, опущенным из вершины прямого угла. Вычислить площадь данного треугольника.

(37, 1878)

**798.** Площадь равностороннего треугольника, вписанного в круг, равняется $m^2$. Найти радиус круга.

(37, 1879)

**799.** Какой из треугольников, имеющих равные основания и равные углы при вершине, имеет наибольшую площадь?

**800.** Сторона равностороннего треугольника, вписанного в круг, равна 6 *см*. Вычислить площадь отсекаемого ею сегмента.

(37, 1876)

**801.** Вычислить сторону ромба, зная, что она равна меньшей из диагоналей и что площадь его равна площади круга радиуса $R$.

(12, 1961)

**802.** Доказать, что площадь круга, построенного на гипотенузе как на диаметре, равновелика сумме площадей кругов, построенных на катетах.

(12, 1957)

**803.** Доказать, что сумма площадей луночек (серпов), лежащих между дугой полуокружности, описанной на гипотенузе как на диаметре, и дугами кругов, описанных на катетах того же прямоугольного треугольника как на диаметрах, равна площади прямоугольного треугольника (теорема Гиппократа).

(40, 1947; 12, 1958; 39, 1965)

**804.** На стороне $AB$ квадрата, вписанного в окружность с центром $O$, как на диаметре описана полуокружность $ADB$, расположенная вне квадрата. Отрезок $OD$ пересекает эту полуокружность в точке $D$, а первоначальную окружность — в точке $C$. Показать, что криволинейный треугольник, заключенный между отрезком прямой $CD$ и дугами $AC$, $AD$, к в а д р и р у е м, т. е. что можно найти (с помощью циркуля и линейки) сторону равновеликого ему квадрата.

(40, 1953)

805. Круг, квадрат и равносторонний треугольник равновелики. Найти отношение их периметров.

806. На диаметре $2r$ полуокружности построен правильный треугольник. Вычислить площадь той его части, которая лежит вне круга.

(16, 1907)

807. В круг радиуса $R$ вписаны три равных круга, касающихся данного и попарно друг друга. Вычислить площадь криволинейной фигуры, заключенной между точками касания этих кругов.

(15, 1908)

808. Круг радиуса $r$ обложен четырьмя кругами, касающимися данного и попарно друг друга. Вычислить площадь одного из этих кругов.

(15, 1907)

809. Сколько кругов одинакового радиуса можно расположить вокруг одного круга того же радиуса так, чтобы каждый из них касался этого круга и двух соседних.

(36, 1947)

810. Окружность радиуса $R$ разделена на 6 равных частей, и между последовательными точками деления проведены равные внутренние дуги такого радиуса, что на данной окружности они взаимно касаются. Вычислить площадь внутренней части данного круга, заключенной между проведенными дугами.

(40, 1950)

811. Круг обложен шестью равными ему кругами, и полученное соединение семи равных кругов охвачено концентрическим кольцом с площадью, равновеликой их сумме. Доказать, что ширина этого кольца равна радиусу кругов.

(40, 1939, 1963, 1966)

812. Пусть $ABC$ полукруг. Из точки $B$ опущен на диаметр $AC$ перпендикуляр $BD$ и на отрезках $AD$ и $DC$, как на диаметрах, описаны два полукруга $AFD$ и $DHC$. Площадь $AFDHCB$ полученной секирки (арбелон) равна площади круга диаметра $BD$. Доказать (задача Архимеда).

(40, 1962)

813. Площадь круга радиуса $R$ разделить концентрической окружностью в крайнем и среднем отношении.

(40, 1959, 1965)

## § 14. ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

814. Площадь диагональной плоскости куба равна $S$. Вычислить: ребро куба, диагональ основания, диагональ куба, его полную поверхность и объем.

(12, 1953)

**815.** Вычислить объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна $a$, а площадь диагонального сечения равна $Q$ ($a = 15$ *м*, $Q = 120$ *м*$^2$).

(34, 1936)

**816.** Стороны основания треугольной пирамиды равны $a$, $b$ и $c$. Все плоские углы при ее вершине прямые. Вычислить объем пирамиды.

**817.** Отрезки $OA$, $OB$, $OC$ взаимно перпендикулярны и длины их соответственно равны $a$, $b$ и $c$. Зная, что объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту, доказать, что расстояние от точки $O$ до плоскости ($ON$), проведенной через точки $A$, $B$, $C$, равно

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}.$$

**818.** Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит ромб $ABCD$, у которого стороны равны $a$ и острый угол 60°. Боковое ребро пирамиды $SA = a$. Доказать, что существует прямоугольный треугольник, стороны которого равны $SB$, $SC$ и $SD$.

(40, 1961)

**819.** В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что его четыре вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, остальные четыре — в плоскости ее основания. Определить ребро куба, если высота пирамиды равна $H$, а боковое ребро равно $a$.

(12, 1961)

**820.** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $5\sqrt{2}$, ребро ее равно 13. Вычислить сторону куба, вписанного в эту пирамиду так, что четыре его вершины находятся на ребрах пирамиды.

(16, 1907; 12, 1961)

**821.** В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре вершины находятся на апофемах пирамиды и четыре — в плоскости основания; все ребра пирамиды равны между собой и каждое из них равно $a$. Вычислить полную поверхность и объем куба.

(16, 1957; 12, 1961)

**822.** Боковая поверхность конуса, равная $S$, будучи развернута в плоскость, дает круговой сектор с углом в 36°. Вычислить объем конуса.

(37, 1876; 15, 1936)

**823.** Боковая поверхность конуса вдвое больше площади его основания. Найти угол его развертки.

(12, 1952)

**824.** Вычислить объем тела, полученного вращением равностороннего треугольника со стороной, равной $a$, вокруг одной из его сторон.

(37, 1881; 34, 1936)

825. Найти объем тела, полученного вращением равнобедренного треугольника вокруг основания, зная, что его основание равно $a$, а высота $b$.

(34, 1935)

826. Найти отношение объемов тела, полученных от вращения треугольника поочередно вокруг каждой из сторон: $a$, $b$ и $c$.

(16, 1906; 15, 1907)

827. Вычислить стороны $a$, $b$ и $c$ треугольника $ABC$, зная, что объемы тел, образуемых при последовательном вращении этого треугольника около каждой его стороны, соответственно равны объемам трех шаров с радиусами $R$, $r$ и $\rho$.

(40, 1938)

828. Вычислить поверхность и объем тела, полученного от вращения правильного шестиугольника вокруг его стороны $a$.

(15, 16, 20, 1908)

829. Вычислить объем тела, полученного от вращения правильного шестиугольника со стороной, равной $a$, около диагонали, разделяющей его пополам, и сравнить с объемом описанного шара.

(37, 1875)

830. Ромб, у которого меньшая диагональ равна его стороне $a$, вращается около прямой, проходящей через конец большей диагонали перпендикулярно к последней. Вычислить поверхность и объем полученного тела вращения.

(37, 1890)

831. Правильный шестиугольник со стороной, равной $a$, вращается вокруг оси, параллельной стороне шестиугольника на расстоянии $a$ от центра тяжести, причем ось лежит в плоскости шестиугольника. Вычислить поверхность и объем тела вращения.

(12, 1961)

832. Прямоугольник со сторонами $a$ и $b$ вращается вокруг оси, проходящей через его вершину, параллельно его диагонали. Вычислить поверхность и объем тела вращения.

(20, 1907; 12, 1961)

833. Найти отношение объемов, образованных вращением параллелограмма последовательно около двух его смежных сторон.

834. Из параллельных сторон трапеции бо́льшая равна $a$, а меньшая равна $b$; каждая непараллельная сторона равна $c$.

Трапеция вращается около прямой, проведенной перпендикулярно к стороне $a$ через конец последней. Вычислить полную поверхность полученного тела вращения ($a = 15$ *см*; $b = 9$ *см*; $c = 5$ *см*).

(37, 1891; 12, 1957)

835. Доказать, что существует только пять видов правильных многогранников.

(40, 1962, 1966)

**836.** Если точка двигается внутри правильного многогранника, то сумма ее расстояний от его граней остается величиной постоянной. Доказать.

**837.** Существует пять кубов, вершинами которых служат вершины данного правильного додекаэдра. Каждое ребро такого куба служит диагонально одной из граней додекаэдра; каждая вершина додекаэдра принадлежит двум из пяти этих кубов. Доказать.

(40, 1962, 1965)

**838.** Ребро правильного многогранника равно $a$. Найти радиусы шара, описанного и вписанного в каждый из правильных многогранников.

(40, 1961)

**839.** Ребро правильного многогранника равно $a$. Найти полные поверхности тетраэдра, гексаэдра, додекаэдра и икосаэдра.

(40, 1961)

**840.** Ребро правильного многогранника равно $a$. Найти объемы тетраэдра, гексаэдра, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра.

(40, 1961)

**841.** Найти отношения объемов правильных тетраэдра и октаэдра, у которых полные поверхности равны.

(15, 1907; 40, 1960)

**842.** Ребро правильного октаэдра равно $a$. Вычислить поверхность и объем вписанного в него шара.

(16, 1907; 40, 1960)

**843.** Два правильных тетраэдра соединены двумя гранями так, что образуют двойную пирамиду. Центры шести боковых граней этой двойной пирамиды приняты за вершины прямой треугольной призмы. Вычислить объем этой призмы, если ребро тетраэдра равно $a$.

(16, 1907; 40, 1961)

**844.** Найти отношение поверхностей куба и вписанного в него шара.

**845.** Ребро икосаэдра равно $a$. Найти отношение объемов правильного икосаэдра и вписанного в него шара.

(16, 1907; 40, 1960)

**846.** Доказать, что для всех многогранников, описанных около одного и того же шара радиуса $R$, отношение объема многогранника к его поверхности есть величина постоянная, равная $\frac{R}{3}$.

(40, 1962)

**847.** Поверхность шара равна $Q$. Вычислить поверхность правильного октаэдра, вписанного в этот шар.

(15, 1907; 40, 1960)

848. В равносторонний конус вписан шар. Вычислить объем и поверхность шара, если образующая конуса равна $a$.

(16, 1957)

849. Около шара радиуса $R$ описан конус, высота которого вдвое больше диаметра шара. Показать, что полная поверхность этого конуса вдвое больше поверхности шара, а объем — вдвое больше объема шара.

(12, 1961)

850. Около шара радиуса $R$ описан усеченный конус, площадь одного из оснований которого вдвое больше площади другого. Вычислить объем усеченного конуса.

(12, 1961)

851. Около шара радиуса $r$ описать конус с наименьшим объемом.

(40, 1962)

852. В шар радиуса $R$ вписать цилиндр наибольшего объема.

(40, 1962, 1965)

853. В круг вписан правильный треугольник. Определить отношение объемов тел, полученных от вращения круга и треугольника вокруг диаметра, проходящего через вершину треугольника.

(12, 1961)

854. По данному объему $V$ усеченного конуса, его высоте $h$ и площади трапеции $m^2$, образованной от сечения конуса плоскостью, проходящей через его ось, определить радиусы оснований конуса.

(37, 1883)

855. Металлический шар радиуса $R$ перелит в прямой конус, боковая поверхность которого в три раза больше площади основания. Вычислить высоту конуса.

(15, 1936)

856. Боковая поверхность прямого кругового конуса 60 $м^2$, а полная поверхность равновелика площади треугольника со сторонами 13, 14 и 15 $м$. Вычислить радиус шара, объем которого равновелик объему этого конуса.

(37, 1882, 1884)

857. В пустом конусе, обращенном вершиной вниз, остановился шар. Отношение объемов этих двух геометрических тел равно $m$; отношение радиуса основания конуса к радиусу шара равно $n$; высота конуса равна $H$. Вычислить, на каком расстоянии, считая от вершины конуса, находится центр шара.

(37, 1882)

858. В конус, представляющий в осевом сечении равносторонний треугольник, положен шар радиуса $r$ и налита вода, уровень которой касается шара. Найти высоту воды в конусе, если шар будет вынут.

(16. 1907: 24. 1949)

**859.** Конус, высота которого $H$ и радиус основания $R$, укреплен в отвесном положении вершиной вниз. В конус налита вода до высоты $h$ и вложен железный шар радиуса $r$, погрузившийся в нее полностью. На какой высоте будет уровень воды?

(12, 1961)

**860.** Какой высоты должен быть конус, описанный около шара радиуса $r$, чтобы отношение полной поверхности конуса к поверхности шара равнялась $k$?

(16, 1908; 40, 1939; 12, 1951)

**861.** Конус описан около двух касающихся шаров, из которых объем одного в 8 раз больше объема другого. Радиус меньшего шара равен $r$. Найти боковую поверхность и объем конуса.

(15, 1936)

**862.** Даны два шара, касающиеся извне, радиусы которых $R$ и $r$, и описанный около них конус. Вычислить боковую поверхность усеченного конуса, основаниями которого служат окружности прикосновения шаров к поверхности конуса.

(4, 1948)

**863.** В шаре радиуса $R$ просверлено цилиндрическое отверстие; ось цилиндра проходит через центр шара, а диаметр основания цилиндра равен радиусу шара. Вычислить объем оставшейся части шара.

(37, 1877, 1878; 15, 1936)

**864.** Дан шар радиуса $R$. На каком расстоянии от центра шара следует провести плоскость, чтобы пирамида, имеющая вершиной центр шара $O$ и основанием квадрат, вписанный в окружность сечения, имела полную поверхность, равную $4m^2$.

(40, 1951, 1965)

**865.** Вычислить (с точностью до двух значащих цифр) объем прямого конуса, боковая поверхность которого, развернутая на плоскость, представляет круговой сектор с радиусом 15 *см* и центральным углом 120°.

(37, 1878)

**866.** Определить угол наклона образующей к основанию конуса, у которого полная поверхность равна удвоенной площади осевого сечения цилиндра, основание и высота которого те же, что и у конуса.

(37, 1910; 12, 1958)

**867.** Полукруг свернут в конус. Найти угол в осевом сечении конуса.

(30, 1958)

**868.** Вычислить радиус основания конуса, если его объем равен $V$, а полная поверхность равна $S$.

(30, 1958)

**869.** Внутри шара проведены две параллельные плоскости по одной стороне его центра на расстоянии 3 *см* друг от друга. Эти плоскости дают в сечении два малых круга, радиусы которых соответственно равны 9 *см* и 12 *см*. Вычислить объем шара.

(37, 1879)

**870.** Вычислить поверхность и объем шара, радиус которого равняется ребру октаэдра, имеющего поверхность, равную $10\sqrt{75}$.

(37, 1883)

**871.** В шар вписан конус так, что высота конуса делится в центре шара в среднем и крайнем отношении. Найти отношение объема шара к объему конуса.

(37, 1885; 40, 1952, 1966)

**872.** На столе лежит тор, т. е. геометрическое тело, образованное вращением круга радиуса $r$ около оси, не пересекающей его. Вычислить поверхность и объем тора, зная, что поверхность шара, лежащего на нем и касающегося стола одной точкой, равна $S$.

(40, 1952)

**873.** Шар, поверхность которого равна $S$, вписан в усеченный конус. Угол образующей конуса с большим основанием равен 60°. Вычислить боковую поверхность этого конуса.

(15, 1907; 12, 1961)

**874.** Шар состоит из медного и железного полушария и весит $Q$ *кг*. Из него выпиливается куб, диагональ которого равна диаметру шара. Определить вес опилок.

(40, 1962)

**875.** Пробковый цилиндр радиуса $R$ просверливается по направлению оси цилиндра и в образовавшийся цилиндрический канал плотно вставляется такой же длины металлический стержень. Удельный вес пробки равен $d$, удельный вес металла — $d_1$. Какой радиус должен иметь металлический стержень, чтобы система двух взятых тел могла плавать, наполовину погружаясь в воду.

(12, 1961)

Часть III

# ТРИГОНОМЕТРИЯ

## § 15. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

**876.** Вычислить $\sin 2\alpha + \operatorname{tg}\beta$, если

$$\sin\alpha = \frac{1}{3} \text{ и } \operatorname{tg}\beta = -\frac{3}{5}.$$

(9, 1948)

**877.** Вычислить $\cos\alpha$, если

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

(16, 1957)

**878.** Зная, чему равен $\cos\frac{\pi}{4}$, доказать, что

$$\cos^2\frac{\pi}{32} = \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{4},$$

$$\sin^2\frac{\pi}{32} = \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{4}.$$

(12, 1951)

**879.** Вычислить $\sin^2 2\alpha$, если

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 7.$$

(39, 1956, 1957, 1958)

**880.** Вычислить

$$\cos 2\alpha,$$

если $\alpha$ удовлетворяет соотношениям:

$$\operatorname{tg}^2\alpha - a\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0,$$

$$0 < a < \frac{\pi}{4},$$

где $a > 0$.

(40, 1962, 1964, 1966)

**881.** Вычислить значение выражения

$$\frac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha},$$

если $\operatorname{tg}\alpha=-7$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

(12, 1961)

**882.** Найти

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha,$$

если

$$\sin\alpha+\cos\alpha=a.$$

(12, 1961; 2, 1963)

**883.** Вычислить значение выражения

$$a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta),$$

если $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ являются корнями квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0.$$

(40, 1962)

**884.** Доказать, что если

$$\sin\alpha+\sin\beta=a,$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=b,$$

то

$$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

(40, 1956, 1961)

**885.** Доказать, что сумма трех дробей вида

$$\frac{a-b}{1+ab},\quad\frac{b-c}{1+bc},\quad\frac{c-a}{1+ac}$$

равна их произведению.

(3, 1928; 40, 1961)

**886.** Доказать, что

$$[\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha]^2+4=4\sec^2\frac{\beta}{2},$$

если

$$\cos(2\alpha+\beta)=1.$$

(39, 1955)

**887.** Доказать, что

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha,$$

если

$$\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)=\sin\beta.$$

(33, 1958)

**888.** Доказать, что равенство

$$\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha = 1$$

невозможно ни при каком значении $\alpha$.

(39, 1954)

**889.** Доказать неравенство

$$\cos\alpha + \alpha \sin\alpha > 1,$$

если $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

(40, 1962, 1966)

**890.** Доказать, что при любом значении $\alpha$ справедливо неравенство

$$\sec^4\alpha + \operatorname{cosec}^4\alpha \geqslant 8.$$

(39, 1953, 1964)

Вычислить без таблиц следующие выражения:

**891.** $\sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16}$.

(39, 1958)

**892.** $\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8}$.

(39, 1960)

Упростить следующие выражения:

**893.** $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$.

(35, 1956)

**894.** $\frac{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi - \alpha)} + \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \pi)\cos(\pi + \alpha)}{\sec\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$.

(18, 1936)

**895.** $\sqrt{\sin^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha)}$

$\left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$.

(12, 1961)

**896.** $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\pi + \alpha) + \cos(\pi - \alpha)\sin(-\alpha) +$

$+ \cos(\pi + \alpha)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

(18, 1936)

**897.** $$\frac{\sin(2\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2}}{\cos(2\pi+\alpha)\cos\pi}+$$

$$+\frac{\sin(\pi+\alpha)\cos 2\pi}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}.$$

(18, 1936)

**898.** $$\frac{1-\cos^2\alpha}{\sec^2\alpha-1}+\frac{1-\sin^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2+\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}.$$

(36, 1948)

**899.** $$\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1}.$$

(18, 1936)

Доказать следующие тождества:

**900.** $\operatorname{tg}^2\alpha+\sec^2\beta=\operatorname{tg}^2\beta+\sec^2\alpha.$

(12, 1961)

**901.** $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1.$

(12, 1961)

**902.** $$\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

(12, 1961)

**903.** $$1+2\cos 7\alpha=\frac{\sin 10{,}5\alpha}{\sin 3{,}5\alpha}.$$

(39, 1956)

**904.** $$\frac{1-\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha(\sec\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)}\cdot\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}=\sin\alpha.$$

(43, 1960)

**905.** $$1-\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

(43, 1961)

**906.** $$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

(43, 1961)

**907.** $$\frac{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+10\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+3}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=3+5\sin\alpha.$$

(43, 1961)

**908.** $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}+\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha}=0.$

(36, 1948; 12, 1957)

**909.** $\sin\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha)+\cos\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)=\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha.$

(20, 1936)

**910.** $\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha+\cos^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha.$

(20, 1936)

**911.** $\dfrac{2\sin^2(45^\circ-\alpha)}{\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha).$

(20, 1936)

**912.** $\dfrac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\sec 2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha.$

(18, 1936)

**913.** $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

(29, 1948; 24, 1949; 12, 1950; 35, 1956)

**914.** $\operatorname{cosec}\alpha+\sec\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha)}{\sin 2\alpha}.$

(20, 1936)

**915.** $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{cosec}2\alpha.$

(30, 1958)

**916.** $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right).$

(20, 1936)

**917.** $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha).$

(30, 1958)

**918.** $\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}=\sin\alpha.$

(18, 1936)

**919.** $2\operatorname{cosec}4\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{tg}2\alpha.$

(20, 1936)

**920.** $\dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\sin 2\alpha.$

(35, 1956)

**921.** $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}=1+\cos\alpha.$

(28, 1954; 12, 1958)

922. $\operatorname{tg} 2\alpha + \sec 2\alpha = \dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$.

(28, 1952; 12, 1957)

923. $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \dfrac{1 + 2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\,(\operatorname{tg}^2\alpha - 1)} = \dfrac{2}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$.

(12, 1950, 1957)

924. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha$.

925. $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha - 2\pi)} + \dfrac{\sin^2(-\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)} = 1$.

(6, 1955)

926. $\dfrac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^6\alpha$.

(6, 1955)

927. $\dfrac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1 + \sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$.

(35, 1956)

928. $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 1 = 0$.

(30, 1958; 52, 1965)

929. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

(30, 1958)

930. $8\cos^4\alpha = 3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$.

(6, 1958)

931. $2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 2\cos\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

(16, 1958)

932. $\cos\alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha = 4\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right) \times$

$\times \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\alpha}{2}\right)$.

(6, 1958)

933. $1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{4\sin(30^\circ + \alpha)\sin(30^\circ - \alpha)}{\cos^2\alpha}$.

(20, 1956)

**934.** $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$.

(6, 1958)

**935.** $\dfrac{1}{\sin^2 \alpha} + \dfrac{1}{\sin^2 \beta} - \dfrac{2 \cos (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \dfrac{\sin^2 (\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$.

(16, 1903)

**936.** $\dfrac{1}{\sin (\alpha - \beta) \sin (\alpha - \gamma)} + \dfrac{1}{\sin (\beta - \alpha) \cos (\beta - \gamma)} +$

$+ \dfrac{1}{\sin (\gamma - \alpha) \sin (\gamma - \beta)} = \dfrac{1}{2 \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \gamma}{2} \cos \dfrac{\beta - \gamma}{2}}$.

**937.** $1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha = 4 \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha$.

(20, 1936)

**938.** $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha = 4 \sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha$.

(20, 1936)

**939.** $\dfrac{\sin \alpha + 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin 3\alpha + 2 \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}$.

(12, 1954)

**940.** $\cos^2 \dfrac{\alpha + \beta}{2} - \sin^2 \dfrac{\alpha - \beta}{2} = \cos \alpha \cos \beta$.

(20, 1936)

**941.** $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\sin \alpha}} = \dfrac{2 \sin \left(15^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right) \cos \left(15^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2 \left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

(12, 1908)

**942.** $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin (\alpha + \beta + \gamma) =$

$= 4 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \sin \dfrac{\beta + \gamma}{2} \sin \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$.

(12, 1908)

**943.** $\dfrac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \dfrac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} = \dfrac{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

(12, 1961)

**944.** $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2 (\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos (\alpha + \beta)$.

(40, 1962)

945. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin^2(\alpha+\beta)$.

(40, 1962)

946. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha + \cdots + \operatorname{tg}(n-1)\alpha\operatorname{tg}n\alpha =$

$$= \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - n.$$

(40, 1962, 1965)

947. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$

(40, 1955, 1961)

948. а) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma = 0$;

(20, 1936; 12, 1956; 30, 1958)

б) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$,
если $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{2}$.

(12, 1961)

949. $\dfrac{\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} + \dfrac{2}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha,$

если $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

(6, 1955; 9, 1965)

950. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2},$

при условии, что $\alpha+\beta+\gamma = 180°$.

(40, 1956)

951. $\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}2\beta + \operatorname{tg}2\gamma = \operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}2\beta\operatorname{tg}2\gamma$,
при условии, что $2\alpha+2\beta+2\gamma = 360°$.

(40, 1956)

952. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$,
при условии, что $\alpha+\beta+\gamma = 180°$.

(6, 1958; 30, 1958)

953. $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\beta}{2} + \sin^2\dfrac{\gamma}{2} - 1 =$

$$= -2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

при условии, что $\alpha+\beta+\gamma = 180°$.

(40, 1955)

**954.** $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{2}{\sin\alpha}$,

если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

(12, 1950)

**955.** $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=2\operatorname{tg}\alpha$,

если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

(15, 1957; 48, 1965)

**956.** $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$

$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}-1,$$

при условии, что $\alpha+\beta+\gamma=360°$.

**957.** $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\sigma=$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\sigma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\sigma},$$

при условии, что $\alpha+\beta+\gamma+\sigma=180°$.

(40, 1956)

**958.** $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=1$,

при условии, что $\alpha+\beta+\gamma=360°$.

(40, 1955)

**959.** $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$,

если $\beta+\gamma=\alpha$.

(40, 1958)

**960.** $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta+\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha=$

$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$,

если $\alpha+\beta+\gamma=90°$.

(40, 1958)

**961.** $\sin^2\alpha=\sin\beta(\sin\gamma+\sin\beta)$, если $\alpha+\beta+\gamma=180°$ и $\alpha=2\beta$.

(40, 1958)

**962.** $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{1+n}{1-n}$,

если $\frac{n^2-1}{1+2n\cos\alpha+n^2}=\frac{1+2n\cos\beta+n^2}{n^2-1}$,

где $n>1$.

(40, 1962, 1965)

963. $\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{3\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}$,

если

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

(40, 1958)

## § 16. ПРИВЕДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ К ЛОГАРИФМИЧЕСКОМУ ВИДУ

Привести к виду, удобному для логарифмирования:

964. $\sin 87^\circ-\sin 59^\circ-\sin 93^\circ+\sin 61^\circ$.

(20, 1936)

965. $\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ-\sin 25^\circ$, зная, что

$$\sin 18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$$

(40, 1956)

966. $\sin 35^\circ+\cos 40^\circ+\sin 55^\circ+\cos 20^\circ$.

967. $\cos 11\alpha+3\cos 9\alpha+3\cos 7\alpha+\cos 5\alpha$.

(20, 1936)

968. $1-\sin\alpha+\cos\alpha$.

(18, 1936)

969. $\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$.

(12, 1898, 1954)

970. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$.

(18, 1936)

971. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

(18, 1936)

972. $3-\operatorname{tg}^2 x$.

(38, 1959; 40, 1960)

973. $\operatorname{ctg}^2 2x-\operatorname{tg}^2 2x-8\cos 4x\operatorname{ctg}4x$.

(43, 1961)

974. $\frac{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}$.

(18, 1936)

975. $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$.

(18, 1936)

976. $\dfrac{\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$.

(18, 1936)

977. $\dfrac{3+5\cos\alpha}{3-5\cos\alpha}$.

(6, 1955)

978. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin 40^\circ$.

(40, 1953)

979. $2+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha$.

(15, 1958)

980. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$.

(16, 1907; 36, 1936)

981. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$.

(36, 1948; 13, 1958)

982. $\cos\alpha+\sin 2\alpha-\cos 3\alpha$.

(6, 1955)

983. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

984. $\sin\alpha+\cos\alpha+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+\sin 3\alpha+\cos 3\alpha$.

(12, 1904)

Просуммировать:

985. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\cdots+\sin n\alpha$.

(40, 1950, 1965)

986. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cdots+\cos n\alpha$.

(40, 1950)

987. $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\cos^2 3\alpha+\cos^2 4\alpha+\cdots+\cos^2 n\alpha$.

(15, 1901; 40, 1955, 1965, 1966)

988. $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2 3\alpha+\sin^2 4\alpha+\cdots+\sin^2 n\alpha$.

Доказать справедливость равенств:

989. $\cos\varphi+\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi+2\alpha)+\cdots+$

$$+\cos(\varphi+n\alpha)+\frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha\cos\left(\varphi+\dfrac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

(40, 1955)

990. $\sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha) + \sin(\varphi+2\alpha) + \cdots + \sin(\varphi+n\alpha) = \dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha \sin\left(\varphi+\dfrac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$

(40, 1955)

991. $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}} - 2\operatorname{ctg}2\alpha.$

(40, 1955, 1965)

992. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha} + \cdots + \dfrac{\sin(2n-1)\alpha}{\sin\alpha} = \left(\dfrac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\right)^2.$

(39, 1957)

993. $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdots\cos 2^k\alpha = \dfrac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}.$

(39, 1957)

## § 17. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Вычислить следующие выражения:

994. $\cos\left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right].$

(16, 1955)

995. $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right).$

(16, 1955)

996. $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{8}{17}\right).$

(6, 1955)

997. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right).$

998. $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right).$

(12, 1954; 6, 1955)

**999.** $\arcsin\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times\right.$
$\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\times$
$\left.\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\right).$

(16, 1957)

**1000.** $\arccos\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{8}}}\times\right.$
$\times\sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{8}}}}\times$
$\left.\times\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{8}}}}\right).$

(16, 1957)

Проверить справедливость следующих равенств:

**1001.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\operatorname{arctg}1.$

(17, 1904; 16, 1955)

**1002.** $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\operatorname{arctg}3.$

(16, 1955)

**1003.** $2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\operatorname{arctg}\frac{32}{43}.$

(17, 1905)

**1004.** $2\arccos\alpha-\arccos(2\alpha^2-1)=0$, где $0\leqslant\alpha\leqslant 1.$

(40, 1957)

**1005.** $2\arcsin\frac{2}{7}=\arccos\frac{41}{49}.$

(12, 1952; 16, 1955)

**1006.** $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2=\pi-\operatorname{arctg}3.$

**1007.** $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$

(17, 1906)

**1008.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$

(11, 1955; 40, 1962, 1965)

**1009.** Найти $x$, если

$$8 \operatorname{arctg} \frac{1}{10} + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}.$$

(40, 1957, 1962)

**1010.** Доказать, что если

$$\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \beta + \operatorname{arctg} \gamma = \pi,$$

то $\alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta\gamma$.

(40, 1957, 1962, 1965)

**1011.** При каких значениях $\alpha \neq 0$ справедливо равенство

$$\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}.$$

(40, 1962)

## § 18. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Решить следующие тригонометрические уравнения:

**1012.** $3 \sin x = 2 \cos^2 x$.

(20, 1936)

**1013.** $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$.

**1014.** $\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$.

**1015.** $\sin 6x = \sin 4x$.

(16, 1908)

**1016.** $\cos 3x = \cos x$.

(20, 1936)

**1017.** $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x$.

(20, 1936)

**1018.** $\sin 3x = \cos 2x$.

(20, 1936)

**1019.** $\sin 3x = \cos x$.

(20, 1936)

**1020.** $\sin 2x - \cos 3x = 0$.

**1021.** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \operatorname{tg} x = 0$.

(16, 1907)

**1022.** $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x = 0$.

(20, 1936)

**1023.** $5 \sin x - \sin^5 x = 0$.

(12, 1936; 20, 1936)

**1024.** $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

(3, 1928)

**1025.** $\operatorname{tg} mx\cdot\operatorname{tg} nx=1$,
если $m+n\neq 0$.

(12, 1901)

**1026.** $\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x)$.

(11, 1955; 12, 1958)

**1027.** $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$.

(16, 1908; 50, 1963; 9, 1965)

**1028.** $\sin(8x+60^\circ)+\sin 2x=0$.

(20, 1936)

**1029.** $\sin^2 2x-\sin^2 x=\sin^2\frac{\pi}{6}$.

(12, 1961; 9, 1965)

**1030.** $\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2$.

(16, 1908)

**1031.** $\sin^2 x+\sin^2 2x=1$.

(20, 1960)

**1032.** $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$.

(8, 1940)

**1033.** $\sin 3x=\cos x-\sin x$.

(20, 1960)

**1034.** $\sin 3x=\sin 2x+\sin x$.

**1035.** $\sin 3x+\sin 2x=\sin x$.

(40, 1960)

**1036.** $\sin x+\cos x=0$.

(36, 1948)

**1037.** $\cos^4 x-\sin^4 x=0$.

(16, 1908)

**1038.** $\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x=1$.

(36, 1947; 20, 1960)

**1039.** $3\sin x=2(1-\cos x)$.

(20, 1936)

**1040.** $\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2}$.

(17, 1905; 28, 1952)

**1041.** $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x.$

(17, 1904; 12, 1951; 39, 1958)

**1042.** $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$

(12, 1952; 39, 1958; 52, 1965)

**1043.** $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}.$

(1, 1948; 40, 1950; 16, 1957; 39, 1957; 30, 1958)

**1044.** $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} = -3.$

(3, 1928; 39, 1958)

**1045.** $8 \sin^2 x + 6 \cos^2 x = 13 \sin 2x.$

(12, 1961)

**1046.** $\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}.$

(3, 1928)

**1047.** $4 \sin^3 x + 4 \sin^2 x - 3 \sin x = 3.$

(12, 1908)

**1048.** $\sin^2 x - 3 \cos^2 x + 2 \sin 2x = 1.$

(12, 1951)

**1049.** $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$

(10, 1954; 38, 1959)

**1050.** $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$

(11, 1907; 12, 1907; 1957; 22, 1953; 31, 1957; 39, 1958; 2, 1964)

**1051.** $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$

(12, 1906)

**1052.** $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$

(6, 1958)

**1053.** $\sin^3 x (1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x (1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$

(2, 1958)

**1054.** $a \sin x + b \cos x = c,$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$.

(40, 1960)

**1055.** $\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x=1$.

(12, 1906; 17, 1908; 41, 1959)

**1056.** $\sin x+\cos x=1$.

(7, 1954; 16, 1957; 12, 1957; 20, 1960)

**1057.** $\sin x+\cos x=\frac{7}{5}$.

**1058.** $\sin x+2\cos x=1$.

**1059.** $8\sin x-3\cos x=4$.

(40, 1960)

**1060.** $5(\sin x+\cos x)^2-12(\sin x+\cos x)+7=0$.

(37, 1876; Франция; 12, 1904, 1951)

**1061.** $\sin x+\cos x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$.

(12, 1951)

**1062.** $\sin x+\cos x=\operatorname{cosec} x$.

(12, 1906; 26, 1936, 1937; 30, 1950)

**1063.** $\sin x+\cos x=\sec x$.

(16, 1907; 12, 1961)

**1064.** $\sin x+\operatorname{tg} x=\sec x-\cos x$.

(36, 1879)

**1065.** $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2$.

(29, 1937; 30, 1958)

**1066.** $\sin 2x+\operatorname{tg} x-2=0$.

(12, 1961)

**1067.** $\operatorname{ctg} x+3\operatorname{tg} x-5\operatorname{cosec} x=0$.

(12, 1961)

**1068.** $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 3x$.

(16, 1950; 12, 1951; 1954, 1955; 15, 1957; 20, 1960)

**1069.** $\sin x\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

(15, 1958)

**1070.** $3\sin x\sin 7x=3\sin^2 4x-1$.

(20, 1960)

**1071.** $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x$.

**1072.** $4 \cos x \sin^2 x = \cos x - \sin x$.

(40, 1961, 1965)

**1073.** $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$.

(16, 1957; 6, 1958; 39, 1958; 41, 1959)

**1074.** $\sin ax \cdot \sin bx = \sin mx \cdot \sin nx$, если $a \geqslant 0$, $b > 0$, $m \geqslant 0$, $n > 0$ и являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии.

(40, 1961, 1965)

**1075.** $\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$.

(11, 1957; 40, 1961)

**1076.** $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x$.

(11, 1957; 2, 1958; 40, 1961; 14, 1966)

**1077.** $\sin(\pi \cos x) - \cos(\pi \sin x) = 0$.

(11, 1950)

**1078.** $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x)$.

(17, 1904; 1, 1956)

**1079.** $\cos(2\pi x) = \cos(\pi x^2)$.

Показать, что целочисленные решения этого уравнения — числа четные.

**1080.** $|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

(40, 1961)

**1081.** $\sin 3x + \sin 2x - n \sin x = 0$.

(2, 1958)

Исследовать решения этого уравнения.

**1082.** $16^{\sin x} = \sqrt[\cos x]{4}$.

**1083.** $(\cos 2x)^{2 \cos 3x + 4 \cos x - 1} = \sec 2x$.

(40, 1961)

**1084.** $(\cos x)^{\sin^2 x - \frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2}} = 1$.

**1085.** $\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1$.

**1086.** $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} 3 = 1$.

**1087.** $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x - 2 = 0$.

(41, 1956; 14, 1966)

**1088.** $\operatorname{tg}^4 x + 2\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$.

(40, 1952)

**1089.** $6 \arcsin (x^2 - 6x + 8{,}5) = \pi$.

**1090.** $2 \arcsin x = \arcsin 2x$.

(32, 1952)

**1091.** $\arccos x - \arcsin x = \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**1092.** $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x} - \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{\pi}{12}$.

(15, 1900)

**1093.** $\arccos x + \arccos (1 - x) = \arccos (-x)$.

**1094.** $\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2} \operatorname{arcsec} 5x = \dfrac{\pi}{4}$.

**1095.** $(\arccos x)^2 - 6 \arccos x + 8 = 0$.

**1096.** $\operatorname{arctg} \dfrac{x}{2} + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{3} = \operatorname{arctg} x$.

Решить следующие системы уравнений:

**1097.** $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = m \\ x + y = n. \end{cases}$

(40, 1965)

**1098.** $\begin{cases} \sin x + \sin y = m \\ x + y = n. \end{cases}$

**1099.** $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{3}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

(12, 1958)

**1100.** $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m \\ x + y = n. \end{cases}$

(12, 1951)

1101. $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = m \\ x + y = n\pi \ (n \text{ — целое число}). \end{cases}$

1102. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = m \\ x + y = n. \end{cases}$

1103. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \\ \cos x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

(40, 1961)

1104. $\begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{y}{2} = m \\ 1 + n \cos y = \dfrac{1 - n^2}{1 - n \cos x} \ (n < 1). \end{cases}$

(17, 1903)

1105. $\begin{cases} \cos (x + y) = \dfrac{1}{6} (1 - 2\sqrt{5}) \\ \cos (x - y) = \dfrac{1}{6} (1 + 2\sqrt{5}). \end{cases}$

Найти $\cos x$ и $\cos y$.

(16, 1901)

## § 19. ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

1106. По трем сторонам $a$, $b$, $c$ и соответственным углам $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ остроугольного треугольника $ABC$ вычислить стороны, углы и площадь треугольника $NMD$, полученного соединением оснований высот данного треугольника $ABC$.

(40, 1950, 1961)

1107. Основания высот (остроугольного) треугольника соединены между собой. Найти площадь полученного треугольника, если стороны данного треугольника равны $a$, $b$ и $c$.

(40, 1962)

1108. Вычислить площадь равнобедренного треугольника, если прямая, соединяющая середины основания и боковой стороны, равна половине радиуса описанного круга.

(3, 1928; 12, 1961)

1109. Произведение расстояний от центра вписанного в треугольник круга до вершин треугольника равно учетверенному произведению квадрата радиуса вписанного круга на радиус описанного. Доказать.

(40, 1962)

**1110.** Решить задачу № 785 при условии, что угол $\alpha$ любой.

**1111.** Полуокружность разделена на три части, хорды которых относятся как 1 : 2 : 1. Определить эти части.

(3, 1928; 40, 1961)

**1112.** Вычислить острый угол прямоугольного треугольника, стороны которого составляют: 1) арифметическую прогрессию; 2) геометрическую прогрессию.

(13, 1958)

**1113.** В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $\alpha$. Вычислить основание, если высота больше радиуса вписанного круга на $m$.

(36, 1949)

**1114.** Окружность радиуса $R$ разделена на шесть равных частей и точки деления соединены с центром. Один из радиусов спроектирован на другой ближайший радиус, на третьем радиусе построена проекция первой проекции, на четвертом — проекция второй проекции и т. д. Найти длину шестой проекции на первый радиус, приняв $R = 128$ *см*.

(12, 1956)

**1115.** Маяк $M$, отстоящий от судна $K$ на $a$ миль, виден с последнего под углом $\alpha$ относительно южного направления и притом с западной стороны. Сколько миль должно проплыть судно в юго-западном направлении для того, чтобы маяк находился от него на север ($a = 5{,}24$ мили, $\alpha = 61^\circ 17' 20''$)?

(37, 1878)

**1116.** По данному радиусу $r$ описанной окружности определить сторону, апофему, периметр и площадь правильного вписанного $n$-угольника.

(36, 1949)

**1117.** Вычислить высоту доступного предмета $AC$ (см. рис. 59).

(36, 1948)

**1118.** Вычислить высоту недоступного предмета $AB$ (см. рис. 60).

(36, 1948)

**1119.** Вычислить ширину реки $BC$ (см. рис. 61).

**1120.** Найти расстояние между двумя недоступными точками $A$ и $B$ (см. рис. 62).

**1121.** На горизонтальной плоскости находятся три неприступные точки $A$, $B$ и $C$, не лежащие на одной прямой. Расстояния между этими точками известны: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Наблюдатель находится в точке $D$ той же горизонтальной плоскости и видит сторону $AB$ под углом $\alpha$, а сторону $BC$ под углом $\beta$. Определить положение наблюдателя, т. е. положение точки $D$ на плоскости (задача Потенота).

(15, 1901; 36, 1948; 39, 1958)

**1122.** Расстояние между огневыми точками $A$, $B$ и $C$ противника известны: $AB = 1{,}4$ *км*; $AC = 1{,}2$ *км* и $BC = 1{,}32$ *км*.

Наблюдатель, стоящий в точке $D$, измерил углы: $\angle ADC = 25° 32'$, $\angle BDC = 40°$. Вычислить расстояния от наблюдателя (точка $D$) до огневых точек $A$, $B$ и $C$ противника, зная, что точки $C$ и $D$ лежат по разные стороны прямой $AB$ и что

$$\angle ADB = \angle ADC + \angle CDB.$$

(36, 1948)

**1123.** Доказать, что для прямоугольного треугольника $ABC$ ($\gamma = 90°$) справедливы следующие соотношения:

$$1)\ \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{2b^2}{c^2}; \quad 2)\ \sin 2\alpha = \frac{2ab}{c^2},$$

$$3)\ \cos 2\alpha = \frac{b^2 - a^2}{c^2}; \quad 4)\ \operatorname{cosec} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{c - b} = \frac{c + b}{a},$$

где $a$ и $b$ — катеты, $c$ — гипотенуза, $\alpha$ и $\beta$ — острые углы треугольника.

(40, 1955)

**1124.** Доказать, что для любого треугольника $ABC$ справедливы следующие соотношения:

$$1)\ \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}; \quad 2)\ \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2};$$

$$3)\ \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{p}; \quad 4)\ \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{b + c}{a};$$

$$5)\ \frac{a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c};$$

$$6)\ a \sin(\beta - \gamma) + b \sin(\gamma - \alpha) + c \sin(\alpha - \beta) = 0;$$

$$7)\ \frac{a^2 \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha} + \frac{b^2 \sin(\gamma - \alpha)}{\sin \beta} + \frac{c^2 \sin(\alpha - \beta)}{\sin \gamma} = 0;$$

$$8)\ \frac{1}{a} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{b} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \frac{1}{c} \cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{p^2}{abc};$$

$$9)\ \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R};$$

$$10)\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p},$$

где $a$, $b$ и $c$ — стороны треугольника, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — соответствующие углы, $p$ — полупериметр, $R$ и $r$ — радиусы описанного и вписанного кругов.

(40, 1950, 1965)

**1125.** Разность длин диагоналей ромба равна $d$ сантиметров, а каждый из тупых его углов равен $\alpha$. Вычислить сторону ромба ($\alpha = 162^\circ 25'$, $d = 14{,}2$ *см*).

(36, 1946)

**1126.** Найти периметр равнобочной трапеции, описанной около круга, если большее основание равно $a$ сантиметров, а острый угол равен $\alpha$.

(36, 1948)

**1127.** Определить отношение радиусов кругов, вписанных в ромб с острым углом $\alpha$ и в половину того же ромба, отсеченную меньшей диагональю.

(12, 1958)

**1128.** В параллелограмме даны острый угол $\alpha$ и расстояния $a$ и $b$ от точки пересечения диагоналей до неравных сторон. Вычислить диагонали и площадь параллелограмма.

**1129.** Две силы, $P = 72$ *кГ* и $Q = 58$ *кГ*, действуют на одну и ту же точку тела по двум направлениям, составляющим угол, равный $72^\circ 30' 44''$. Вычислить равнодействующую этих сил.

(37, 1882)

**1130.** С вершины вышки высотой 33,3 *м* виден речной мост, направление которого лежит в одной вертикальной плоскости с осью вышки. Лучи зрения, идущие к концам моста, составляют с вертикалью углы $52^\circ 7'$ и $41^\circ 18'$. Определить длину моста.

(37, 1885)

**1131.** Как велика географическая широта места, если находящаяся в этом месте башня высотой 22,5 *м* в полдень 10 марта (когда солнце находится почти на пересечении экватора с меридианом) отбрасывает тень длиной 16,5 *м*.

(37, 1875)

**1132.** Над центром круглого стола висит на блоке электрическая лампа. На какой высоте следует укрепить эту лампу, чтобы получить на краях стола наибольшую освещенность?

(40, 1961)

**1133.** Найти такой круговой сегмент, хорда которого равна длине вписанной в него наибольшей окружности.

(40, 1960)

## § 20. ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

**1134.** Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с меньшей боковой гранью угол $\beta$. Через большие стороны оснований проведено сечение параллелепипеда. Зная, что периметр этого сечения равен $m$ и что плоскость его образует с плоскостью основания угол $\alpha$, найти объем параллелепипеда ($m = 24{,}2$ *дм*, $\alpha = 33° 28'$, $\beta = 51° 10'$).

(37, 1955)

**1135.** Через одно из ребер куба проведена плоскость, составляющая со смежной гранью угол $\alpha$.

Вычислить объем каждой части куба, зная, что площадь сечения равна $m$ *см*$^2$ ($\alpha = 40°$, $m = 76{,}6$ *см*$^2$).

**1136.** Сохраняя условие предыдущей задачи, найти отношение объемов $V_2$ и $V_1$.

(16, 1904)

**1137.** Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол $\alpha$, а с боковой гранью угол $\beta$. Высота параллелепипеда равна $H$. Найти объем параллелепипеда ($H = 8{,}342$, $\alpha = 34° 43'$, $\beta = 41° 18'$).

(37, 1946)

**1138.** Грани параллелепипеда — ромбы, которые равны между собой и расположены так, что встречаются вместе три острых плоских угла. Найти объем параллелепипеда, если сторона ромба равна $a$ и острый угол равен $\alpha$.

(16, 1905; 12, 1957)

**1139.** Основанием пирамиды служит квадрат со стороной, равной $a$; двугранные углы, образуемые гранями с основанием, относятся как 1 : 2 : 4 : 2. Вычислить эти углы.

(12, 1958)

**1140.** В правильной прямой треугольной призме через сторону основания проведена плоскость, которая в сечении дала треугольник с периметром вдвое большим, чем у основания. Определить угол между этой плоскостью и плоскостью основания и вычислить отношение радиусов кругов: вписанного в сечение и описанного около основания.

**1141.** В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник $ABC$. Через одну из сторон основания и противоположную вершину проведена плоскость. Дан угол $\beta$ сечения с основанием и площадь сечения $S$. Найти объем и полную поверхность призмы ($\beta = 50° 12' 49''$, $S = 405{,}92$).

**1142.** Основанием прямой призмы служит треугольник $ABC$ ($AB = AC$), периметр которого равен $2p$ и угол при вершине $A$ равен $\alpha$. Через сторону $BC$ нижнего основания и противолежащую вершину $A_1$ верхнего основания проведена плоскость, составляющая с плоскостью нижнего основания угол, равный $\beta$.

Вычислить объем призмы ($p = 23{,}75$ *см*, $\alpha = 47° 32'$, $\beta = 55° 20'$).

(37, 1948)

**1143.** Сохраняя условие предыдущей задачи, вычислить полную поверхность призмы.

**1144.** В правильной четырехугольной пирамиде боковые ребра $b$ образуют с плоскостью основания угол $\alpha$. Через диагональ основания проведена плоскость параллельно боковому ребру. Вычислить площадь сечения ($b = 2{,}4$ *м*, $\alpha = 22° 15'$).

(20, 1936)

**1145.** От правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания $a$ и плоским углом при вершине $\alpha$ плоскостью, проходящей через диагональ основания данной пирамиды параллельно одному из ее боковых ребер, отсечена треугольная пирамида.

Вычислить боковую поверхность образованной треугольной пирамиды, приняв за основание ее грань, лежащую на основании данной четырехугольной пирамиды ($a = 7{,}18$ *дм*, $\alpha = 41° 44'$).

(37, 1951)

**1146.** Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна $S$. Угол наклона плоскости боковой грани к основанию равен $\alpha$. Вычислить объем пирамиды ($S = 4{,}162$ *м*$^2$, $\alpha = 71° 34'$).

(51, 1963)

**1147.** Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб, меньшая диагональ которого равна $d$, а острый угол равен $\alpha$. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом $\beta$. Вычислить полную поверхность пирамиды ($d = 22{,}35$, $\alpha = 43° 16'$, $\beta = 52° 18'$).

(37, 1946)

**1148.** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $a$; плоский угол при вершине пирамиды равен $\alpha$. Найти боковую поверхность и объем пирамиды ($a = 23{,}9$ *см*, $\alpha = 32° 23'$).

(37, 1946)

**1149.** Основанием пирамиды служит ромб со стороной $a$ и острым углом $\beta$. Двугранные углы при основании равны $\alpha$. Найти объем и полную поверхность пирамиды ($a = 25{,}3$ *см*, $\beta = 50° 25'$, $\alpha = 35° 17'$).

(37, 1946)

**1150.** Основанием пирамиды служит ромб со стороной, равной $a$. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой тупой угол $\beta$; две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $\alpha$. Найти боковую поверхность пирамиды ($a = 11{,}08$ *м*, $\alpha = 69° 16'$, $\beta = 106° 50'$).

(37, 1953)

**1151.** Дана пирамида, в основании которой лежит параллелограмм, причем диагонали его пересекаются под углом $\alpha$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна $h$.

Неравные боковые ребра образуют с плоскостью основания углы $\beta$ и $\gamma$. Вычислить объем пирамиды ($h = 27{,}8$ *см*, $\alpha = 34° 19'$, $\beta = 52° 17'$, $\gamma = 43° 15'$).

(37, 1946)

**1152.** Боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды равны $a$ и наклонены к плоскости основания под углом $\alpha$. Найти боковую поверхность и объем пирамиды ($a = 19{,}7$ *см*, $\alpha = 53° 29'$).

(37, 1946; 51, 1963)

**1153.** В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания под углом $\beta$ к нему проведена плоскость. Определить площадь полученного сечения, если апофема пирамиды равна $a$ и боковая грань наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$ ($a = 10{,}75$ *дм*, $\alpha = 62° 35'$, $\beta = 39° 45'$).

(37, 1946)

**1154.** Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом $\alpha$ и удалено от середины противоположной стороны основания на расстояние $k$.

(13, 1958)

**1155.** Основанием пирамиды служит треугольник с углами $\alpha$ и $\beta$. Высота пирамиды равна $h$; угол ребер с плоскостью основания $\gamma$. Найти объем пирамиды.

**1156.** В правильной треугольной пирамиде вершина основания находится на расстоянии $b$ от противолежащей боковой грани. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, зная, что апофема пирамиды наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$.

(12, 1956)

**1157.** Основанием пирамиды служит треугольник с углами $\alpha$ и $\beta$. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $\gamma$. Найти объем пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен $R$.

(12, 1950)

**1158.** Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, острый угол которого равен $\alpha$; каждое из боковых ребер равно $b$ и образует с плоскостью основания угол $\beta$. Найти объем пирамиды ($b = 30{,}75$ *м*, $\alpha = 73° 20'$, $\beta = 40° 30'$).

(37, 1956; 46, 1961; 51, 1965)

**1159.** Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину $b$ и составляют угол $\alpha$. Боковые ребра пирамиды составляют с ее высотой угол $\beta$. Определить объем пирамиды.

(20, 1936)

**1160.** В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны $b$ и углы при основании $\alpha$. Угол ребер с плоскостью основания равен $\beta$. Найти площадь сечения, проходящего через высоту пирамиды и вершину угла $\alpha$ ($b = 5$, $\alpha = 56° 17' 43''$, $\beta = 70° 26' 18''$).

(37, 1882)

**1161.** Две правильные треугольные пирамиды имеют общую высоту; вершина каждой пирамиды лежит в центре основания другой, боковые ребра одной пересекают боковые ребра другой. Боковое ребро $l$ первой пирамиды образует с высотой угол $\alpha$, боковое ребро второй пирамиды образует с высотой угол $\beta$. Найти объем общей части обеих пирамид.

**1162.** Боковая поверхность цилиндра развернута на плоскости. Диагонали развертки пересекают основание под углом $\alpha$ и каждая равна $d$. Вычислить объем цилиндра ($\alpha = 48^\circ\ 10'\ 18''$, $d = 15{,}786$).

(20, 1936; 30, 1958)

**1163.** Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра под углом $\alpha$ к основанию, пересекает верхнее основание по хорде $b$, стягивающей дугу $\beta$. Вычислить объем цилиндра.

(12, 1954)

**1164.** Угол при вершине в осевом сечении конуса равен $\alpha$. Найти центральный угол в развертке его боковой поверхности.

(30, 1958)

**1165.** Полная поверхность конуса равна $S$. Образующая его наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. Вычислить объем конуса ($S = 185$ *см*$^2$, $\alpha = 69^\circ\ 41'$).

(20, 1936)

**1166.** Найти объем прямого конуса, если его боковая поверхность, будучи развернута на плоскости, дает круговой сектор с хордой, равной $a$, и с центральным углом $\alpha$ ($a = 8{,}345$, $\alpha = 72^\circ\ 8'\ 36''$).

(16, 1908)

**1167.** Через две образующие конуса, составляющие угол $\alpha$, проведена плоскость, образующая с плоскостью основания конуса угол $\beta$. Площадь сечения равна $Q$. Вычислить высоту конуса.

(12, 1958)

**1168.** Радиусы нижнего и верхнего оснований усеченного конуса равны $R$ и $r$. Образующие наклонены к плоскости основания под углом $\alpha$. Вычислить боковую поверхность и объем усеченного конуса.

(18, 1936)

**1169.** В усеченном конусе, у которого отношение площадей оснований равно 4, образующая равна $l$ и наклонена к плоскости нижнего основания под углом $\alpha$. Вычислить объем конуса.

(12, 1954, 1957)

**1170.** Ромб, сторона которого равна $a$ и острый угол равен $\alpha$, вращается вокруг оси, проведенной через вершину острого угла перпендикулярно к стороне. Определить поверхность тела вращения.

(20, 1936)

**1171.** Сохраняя условие предыдущей задачи, вычислить объем и поверхность тела вращения, если $a = 12$ *м*, $\alpha = 54^\circ\ 27'$.

**1172.** Параллелограмм, диагональ которого равна $d$, а углы между этой диагональю и сторонами параллелограмма равны $\alpha$ и $\beta$, вращается вокруг оси, проходящей через вершину перпендикулярно диагонали $d$. Найти объем и поверхность тела вращения.

(16, 1957)

**1173.** Сохраняя условие предыдущей задачи, вычислить объем и поверхность тела вращения, если ось вращения проходит через вершину параллелограмма параллельно диагонали $d$.

**1174.** Параллелограмм $ABCD$ со сторонами $a$ и $b$ и острым углом, равным $\alpha$, вращается вокруг оси, проходящей через вершину $A$ параллельно диагонали параллелограмма. Определить поверхность и объем тела вращения.

(40, 1962; 1965)

**1175.** Трапеция, большее основание которой равно $b$, меньшее равно $a$ и углы при большем основании равны $\alpha$ и $\beta$, вращается около большего основания. Найти объем полученного тела вращения.

(20, 1936)

**1176.** Решить предыдущую задачу, полагая $b = 32{,}375$ *м*, $a = 17{,}225$ *м*, $\beta = 42^\circ\,30'\,27''$, $\alpha = 61^\circ\,29'\,13''$.

**1177.** Равнобедренный треугольник с углом при основании, равным $\alpha$, и боковой стороной, равной $b$, вращается вокруг оси, проходящей через конец основания параллельно боковой стороне. Найти объем тела вращения.

(30, 1958)

**1178.** Полная поверхность конуса равна $S$, а угол при вершине осевого сечения $\alpha$. Найти радиус шара, равновеликого данному конусу ($S = 528{,}46$ *см*$^2$, $\alpha = 115^\circ\,28'$).

(20, 1936)

**1179.** В основании цилиндра проведена хорда, равная стороне правильного $n$-угольника, вписанного в это основание; если соединить концы этой хорды с центром другого основания, то получится треугольник, площадь которого равна $Q$, а угол при вершине равен $\alpha$. Вычислить боковую поверхность и объем данного цилиндра.

(8, 1927; 12, 1955)

**1180.** Полная поверхность конуса равна $S$. Образующая его наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. Вычислить объем правильной $n$-угольной пирамиды, вписанной в этот конус.

**1181.** В конус, объем которого равен $V$ и угол между образующей и высотой равен $\alpha$, вписана правильная пятиугольная пирамида. Найти объем пирамиды, принимая $V = 8800$, $\alpha = 43^\circ\,36'\,8''$.

(38, 1936, Болгария)

**1182.** В цилиндр, радиус основания которого равен $R$, вписана пирамида так, что ее основание, являющееся правильным треугольником, вписано в основание цилиндра, а вершина находится на окружности другого основания цилиндра.

Зная, что две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а третья образует с ней угол $\alpha$, найти боковую поверхность пирамиды ($R = 8{,}23$ *м*, $\alpha = 53° 50'$).

(37, 1956)

**1183.** В конус вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник, и боковая грань, проходящая через один из катетов, образует с плоскостью основания угол $\alpha$. Найти объем пирамиды, если образующая конуса равна $l$ и наклонена к плоскости основания под углом $\beta$ ($l = 12{,}7$ *дм*, $\alpha = 62° 14'$, $\beta = 54° 19'$).

(37, 1951)

**1184.** Вычислить половину угла при вершине осевого сечения прямого конуса, если объем вписанного в него шара равновелик объему, содержащемуся между сферической поверхностью и вершиной конуса.

(40, 1954)

**1185.** В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна $a$ сантиметров. Плоскость, проходящая через вершину конуса и одну из сторон этого квадрата, дает в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине которого равен $\alpha$. Определить объем конуса ($a = 63{,}146$ *см*, $\alpha = 66° 52'$).

(37, 1898, 1946; 20, 1936)

**1186.** Шар объема $v$ вписан в конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол $\alpha$. Вычислить объем конуса ($v = 84{,}736$ $м^3$, $\alpha = 56° 13'$).

(20, 1936)

**1187.** В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$ и площадь основания равна $S$, вписан шар. Найти объем конуса, отсекаемого от данного плоскостью круга, по окружности которого поверхность шара касается боковой поверхности конуса ($S = 18{,}25$ $см^2$, $\alpha = 56° 32'$).

(37, 1949)

**1188.** В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой боковая поверхность конуса касается шара, равен $r$. Радиус шара, проведенный в произвольную точку этой окружности, наклонен к ее плоскости под углом $\alpha$. Найти объем конуса.

(47, 1961)

**1189.** Угол, составленный образующей конуса с плоскостью его основания, равен $\beta$, а сумма образующей и радиуса основания равна $m$. Определить поверхность вписанного в этот конус шара.

(47, 1961)

**1190.** В пустой конус, обращенный вершиной вниз, уложен тяжелый шар радиуса $r$ и налита вода, уровень которой касается шара сверху (вода заполняет и ту часть конуса, которая находится под шаром). Найти высоту воды в конусе до и после того, как шар будет из него вынут.

(40, 1960, 1965)

**1191.** Около конуса описан шар, площадь большого круга которого равна $Q$. В конус вписан шар. Определить объемы вписанного и описанного шаров и конуса, если образующая конуса наклонена к его основанию под углом $\alpha$.

(16, 1907)

**1192.** В усеченный конус вписан шар. Известно, что боковая поверхность конуса относится к поверхности шара, как $m : n$. Определить угол между образующей и бóльшим основанием и вычислить отношение радиусов вписанного и описанного шаров ($m : n = 2$).

**1193.** В конус вписан шар, площадь большого круга которого равна $Q$. Найти полную поверхность конуса, если известно, что угол его осевого сечения равен $\alpha$ ($Q = 48{,}36$, $\alpha = 54^\circ 32'$).

(37, 1947)

**1194.** Около шара радиуса $r$ описан конус, образующие которого наклонены к плоскости основания под углом $\alpha$. Вычислить полную поверхность и объем конуса ($r = 3{,}842$ *см*, $\alpha = 32^\circ 18' 15''$).

(18, 1936)

**1195.** В шар радиуса $R$ вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. Вычислить объем конуса ($\alpha = 64^\circ 48' 24''$, $R = 2{,}4$).

(16, 1908; 9, 1965)

**1196.** В шар радиуса $R$ вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольник с углом $\alpha$ между диагоналями. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $\varphi$. Определить объем пирамиды ($\alpha = 35^\circ 42'$, $\varphi = 26^\circ 17'$, $R = 12{,}58$ *см*).

(37, 1947)

**1197.** Радиус основания конуса равен $R$, а образующая наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. В этот конус вписан ряд шаров так, что первый шар касается боковой поверхности и его основания, а каждый следующий — боковой поверхности конуса и предыдущего шара. Найти предел, к которому стремится сумма объемов этих шаров, если число их бесконечно увеличивается ($R = 25$, $\alpha = 52^\circ 49' 55''$).

(40, 1952)

**1198.** Шар вписан в прямую призму, основанием которой служит прямоугольный треугольник. В этом прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, имеет длину, равную $h$, и составляет с одним из катетов угол $\alpha$. Найти объем призмы ($h = 1{,}72$, $\alpha = 20^\circ$).

(37, 1911; 12, 1952; 52, 1964)

**1199.** В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Определить поверхность шара, если известно, что сторона основания равна $a$ и плоский угол при вершине пирамиды равен $\alpha$ ($a = 10{,}75$ *дм*, $\alpha = 41^\circ 44'$).

(37, 1949)

**1200.** Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны $b$; две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны, перпендикулярны к основанию, а третья грань наклонена к нему под углом $\alpha$. Угол при вершине равнобедренного треугольника также равен $\alpha$. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

(40, 1952)

**1201.** Сохраняя условие предыдущей задачи, найти радиус шара, описанного около этой пирамиды.

**1202.** В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно $b$ и плоский угол при вершине равен $\alpha$. Определить часть поверхности, заключенную внутри шара, для которого высота пирамиды служит диаметром.

**1203.** Объем правильного тетраэдра равен $\sqrt{41272}$ *дм*$^3$. Вычислить полную поверхность этого тетраэдра и найти величину его двугранного угла.

(37, 1876)

**1204.** Вычислить объем правильной 15-угольной пирамиды, если известно, что высота пирамиды с каждым из боковых ребер образует угол 23° 17′, а радиус круга, описанного около основания, равен 12,4 *см*.

(37, 1882)

**1205.** В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро, равное $b$, образует с плоскостью основания угол $\alpha$. В пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что боковой поверхностью он касается основания пирамиды, а окружностями оснований касается всех боковых граней. Вычислить радиус основания цилиндра.

(16, 1908)

**1206.** Прямой цилиндр и прямой конус имеют равные высóты; боковая поверхность цилиндра относится к боковой поверхности конуса, как $m : n$; кроме того, известно, что угол, составленный образующей конуса с плоскостью его основания, равен $\alpha$. Найти отношение объема цилиндра к объему конуса.

(40, 1951)

**1207.** Угол при вершине прямого конуса равен $\alpha$, а радиус основания равен $R$. Вершина конуса принята за центр шара, а радиус шара взят такой длины, что поверхностью шара данный конус разделится на две равновеликие части. Найти длину радиуса шара.

(9, 1965)

**1208.** Сторона правильного шестиугольника равна $a$. Вычислить объем тела, полученного от вращения этого многоугольника вокруг одной из его сторон.

(40, 1951)

**1209.** Круговой сегмент, радиус которого равен $R$, а дуга $\beta$, вращается вокруг диаметра, проходящего вне его и образующего с одним из крайних радиусов угол $\alpha$. Найти объем тела вращения ($R = 6{,}325$ *см*, $\alpha = 48° 52'$, $\beta = 60°$).

(37, 1940; 40, 1950)

**1210.** Радиус шара равен $R$. Определить объем шарового сектора, которому соответствует центральный угол, равный $\alpha$.

(37, 1898)

**1211.** Определить поверхность земного пояса, лежащего между широтами $\varphi_1$ и $\varphi_2$, если радиус земного шара равен $R$ ($\varphi_1 \geqslant \varphi_2$).

(37, 1898)

**1212.** Из вершины конуса, как из центра, описана внутри него сферическая поверхность, касательная к основанию конуса. Найти угол при вершине осевого сечения этого конуса, если указанная поверхность делит его объем пополам.

(6, 1958)

**1213.** В правильной треугольной пирамиде вершина основания находится от противолежащей боковой грани на расстоянии, равном $b$. Найти полную поверхность конуса, вписанного в данную пирамиду, зная, что апофема пирамиды наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$.

(33, 1958)

**1214.** В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед. Найти боковую поверхность цилиндра, если известно, что бо́льшая сторона основания параллелепипеда равна $a$, острый двугранный угол между его диагональными плоскостями равен $\alpha$, а диагональ параллелепипеда составляет с меньшей боковой гранью угол $\beta$.

(33, 1958)

**1215.** В цилиндр, образующая которого равна $l$, вписана пирамида так, что основание ее, являющееся правильным треугольником, вписано в одно основание цилиндра, а вершина находится на другом.

Зная, что две боковые грани пирамиды перпендикулярны к ее основанию, а третья образует с ним двугранный угол $\alpha$, найти боковую поверхность пирамиды.

(33, 1958)

**1216.** Сторона правильного семиугольника равна $a$. Вычислить объем тела, полученного от вращения этого многоугольника вокруг одной из его сторон.

(40, 1951)

**1217.** Считая, что Земля имеет форму шара радиуса $R$, а искусственный спутник обращается вокруг Земли по круговой орбите на высоте $h$ над поверхностью Земли, определить, на какой угол ниже горизонта должно опуститься солнце, чтобы наблюдение спутника, освещенного солнцем, было в данной точке земной поверхности невозможно.

(39, 1965)

## § 21. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

**1218.** Вершины $A$, $B$ и $C$ треугольника $ABC$ соединены с точками $A_1$, $B_1$ и $C_1$, расположенными на противоположных сторонах (но не в вершинах). Доказать, что середины отрезков $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ не лежат на одной прямой.

(39. 1955)

**1219.** Из точки $O$ внутри треугольника $ABC$ на его стороны опущены перпендикуляры $t_a$, $t_b$ и $t_c$. Доказать, что

$$\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1.$$

(39, 1955)

**1220.** Три селения $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой. Как провести прямолинейную дорогу из пункта $A$, чтобы кратчайшие расстояния от него до пунктов $B$ и $C$ были одинаковы?

(39, 1940)

**1221.** Доказать, что если в четырехугольник можно вписать и около него описать окружность, то площадь такого четырехугольника равна корню квадратному из произведения его сторон.

(39, 1950)

**1222.** Доказать, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности, если сумма углов при основании равна 90°.

(39, 1956)

**1223.** Из точки $A$ вне окружности провести секущую так, чтобы она делилась окружностью пополам.

(40, 1955, 1965)

**1224.** Доказать, что расстояние точки окружности от хорды круга есть среднее пропорциональное между расстояниями концов хорды от касательной к окружности в данной точке.

(39, 1952)

**1225.** Доказать, что если в круге две хорды $AB$ и $CD$ пересекаются под прямым углом в точке $E$, не являющейся центром, то сумма квадратов отрезков этих хорд равна квадрату диаметра.

(39, 1951)

**1226.** На поверхности куба найти три точки, из которых его диагональ видна под наименьшим углом.

(40, 1957)

**1227.** Прямоугольный параллелепипед, у которого длина ребер равна 8 *дм*, 8 *дм* и 27 *дм*, разрезать на 4 части, из которых можно было бы сложить куб.

(40, 1958)

**1228.** Чашка, имеющая форму полушария, наполнена водой, а затем наклонена на угол 45°. Доказать, что воды в чашке останется около 12%.

(40, 1951)

**1229.** На каком расстоянии от центра шара радиуса $R$ надо провести плоскость, чтобы поверхность шарового сегмента разделилась в отношении $m : n$, если дуга его главного сечения $\alpha$.

*

(40, 1927)

**1230.** Сколько квадратных километров земной поверхности может обозреть летчик, поднявшийся над землей на высоту $h$ километров.

(40, 1926)

**1231.** На сколько частей делят пространство $n$ плоскостей, проходящих через одну точку, если никакие три из них не проходят через одну прямую.

(40, 1956)

**1232.** Доказать, что

$$\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{n-1}{2n}\,\pi=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

(40, 1961, 1964)

**1233.** Доказать, что

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n}{2n+1}\,\pi=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

(40, 1961, 1964)

**1234.** Доказать, что при $0<x<\frac{\pi}{4}$ справедливо неравенство

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x\,(\cos x-\sin x)}>8.$$

(42, 1957)

**1235.** Доказать, что последовательность чисел

$$u_1=\cos x+i\sin x,$$
$$u_2=\cos 2x+i\sin 2x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n=\cos nx+i\sin nx$$

есть геометрическая прогрессия. Вычислить ее сумму.

(1, 1950; 40, 1961, 1965)

**1236.** Доказать, что

$$4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}.$$

(39, 1950)

**1237.** Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2^2}\cos\frac{a}{2^3}\cdots\cos\frac{a}{2^n}\right),$$

если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

(40, 1952, 1964, 1965)

Часть IV

# ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ И ПИСЬМЕННЫЕ РАБОТЫ, ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

## § 22. ЗАДАЧИ, ТЕОРЕМЫ И ВОПРОСЫ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ НА УСТНЫХ ЭКЗАМЕНАХ

### а) Арифметика и алгебра

**1238.** Что называется системой счисления. Какие системы счисления вам известны. Что значит позиционная система счисления?

**1239.** Разделить число 240 на части, пропорциональные числам 5 : 6,25 : 8, (3).

**1240.** Разделить число 360 на части в отношении

$$\frac{1}{10} : \frac{1}{12} : \frac{1}{15} : \frac{1}{20}.$$

**1241.** Найти число, 2,6% которого равно 9.

**1242.** Найти число, $\frac{5}{12}$ которого равны 35.

**1243.** Построенная 2000 лет назад «великая китайская стена» имеет длину 2400 *км*, толщину 6 *м*, высоту 7,5 *м*. Найти объем стены.

**1244.** Назовите пару чисел, произведение которых равно их частному.

**1245.** Укажите такую дробь, которая не изменит своего значения, если к ее числителю и знаменателю прибавить одно и то же число.

**1246.** Через сколько лет срочный вклад на сберегательной книжке удвоится (из расчета 3% годовых)?

**1247.** Необходимо приближенно подсчитать число деревьев в лесу на определенном участке. Как практически это сделать?

**1248.** Верно ли, что среднее арифметическое двух неравных положительных чисел всегда больше их среднего геометрического?

**1249.** Доказать, что в разложении бинома с любым четным показателем наибольший биномиальный коэффициент есть число четное.

**1250.** Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы один из корней многочлена был равен нулю.

**1251.** Как расположатся на плоскости точки, соответствующие двум сопряженным комплексным числам?

**1252.** Разложить на множители

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

**1253.** Сократить дробь

$$\frac{x^8 + x^4 + 1}{x^2 + x + 1}.$$

**1254.** Разделить $(x - y)$ на $\left(x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}}\right)$.

**1255.** Доказать тождество

$$(ad + bc)^2 + (ac - bd)^2 = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2.$$

**1256.** Показать, что если

$$x + x^{-1} = a,$$

то

$$x^3 - x^{-3} = a\,(a^2 - 3).$$

**1257.** Равносильны ли уравнения

$$a \lg x^3 = c$$

и

$$3a \lg x = c.$$

**1258.** Что значит решить систему уравнений?

**1259.** При каких значениях $a$ уравнение

$$\frac{2a + 5}{3} = \frac{5ax + 1}{4}$$

имеет отрицательное решение?

**1260.** Вычислить

$$\frac{1\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{12\frac{1}{6} - (1 - i)^8 : 1\frac{1}{3}}.$$

**1261.** Уравнение

$$x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10 = 0$$

имеет корень $1 - 2i$. Найти остальные корни.

**1262.** Сплав весом $M$ килограммов, состоящий из двух металлов, удельный вес которых соответственно равен $p$ и $q$, теряет при погружении в воду $m$ килограммов. Определить количество каждого металла, входящего в сплав.

**1263.** Найти отношение двух чисел, если отношение их среднего арифметического к среднему геометрическому равно 25 : 24.

**1264.** Как расположится график функции в плоскости $xoy$

$$y = ax^2 + bx + c$$

при $a > 0$; при $a < 0$.

**1265.** Построить график функции

$$y = |x|.$$

**1266.** Построить график функции

$$y = x^2 + \frac{60}{x}$$

и посредством этого графика найти вещественные корни уравнения

$$x^2 + \frac{60}{x} - 10x - 5 = 0.$$

**1267.** Вычислить величину $x$ из соотношения

$$x = a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}.$$

**1268.** Найти $x$, если $\log_{125} x = -0,(6)$.

**1269.** Логарифм числа 0, (1) равен $-1,(3)$. Найти основание логарифмов.

**1270.** Решить неравенство

$$\sqrt{2x+1} < \frac{2(x+1)}{2-x}.$$

**1271.** Вычислить $C_{100}^{99}$.

**1272.** Решить уравнение

$$C_{x+8}^{x+3} = 5A_{x+6}^{3}.$$

**1273.** Найти $x$ и $n$, если

$$\frac{A_x^{n-3}}{A_x^{n-2}} = \frac{1}{8}, \quad \frac{C_x^{n-3}}{C_x^{n-2}} = \frac{5}{8}.$$

**1274.** Вычислить выражение

$$(4\sqrt{3}+8)\left[\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\ldots\right],$$

предварительно доказав, что выражение, стоящее в квадратных скобках, есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

**1275.** Можно ли указать три числа, которые составляют одновременно и арифметическую и геометрическую прогрессии?

**1276.** Указать пары таких вещественных чисел, сумма которых равна их произведению.

**1277.** Найти число, обладающее тем свойством, что, будучи умножено на 12, по прибавлении к своему кубу равняется ушестеренному квадрату самого себя, увеличенному тридцатью пятью.

**1278.** Найти трехзначное число, равное сумме факториалов своих цифр.

**1279.** Какое арифметическое действие можно производить над числом и основанием логарифма, не изменяя значения логарифма?

**1280.** Доказать, что три значения $\sqrt[3]{1}$ составляют геометрическую прогрессию.

**1281.** Вычислить $8^{\log_2 \sqrt[3]{124} + \frac{1}{3}}$.

**1282.** Доказать без помощи таблиц, что

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2.$$

**1283.** Верно ли, что если сумма двух чисел постоянна, то их произведение принимает наибольшее значение, когда сомножители равны между собой.

**1284.** Что больше: $\lg \lg \lg a$ или $\lg^3 a$ $(a > 1)$?

**1285.** Чему равно основание системы логарифмов, в которых 7 есть логарифм числа 2187?

**1286.** Найти положительные корни уравнения

$$x^x = x.$$

**1287.** Назовите фамилии нескольких выдающихся русских и советских ученых — математиков.

### б) Геометрия

**1288.** Разделить отрезок $a$ в среднем и крайнем отношении.

**1289.** Доказать, что диагональ и сторона квадрата несоизмеримы.

**1290.** Доказать, что из всех прямоугольников со сторонами $a$ и $b$ наибольшую площадь имеет квадрат.

**1291.** Доказать, что если основания высот треугольника соединить, то получим треугольник, для которого эти высоты будут биссектрисами.

**1292.** Доказать, что из медиан всякого треугольника можно построить треугольник.

**1293.** Вычислить гипотенузу прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанного круга равен 2 *см*, а радиус описанного круга равен 5 *см*.

**1294.** По гипотенузе прямоугольного треугольника $c$ и по сумме катетов $a + b = k$ вычислить его площадь.

**1295.** Как изменится площадь треугольника, если высоту его увеличить в $m$ раз, а основание уменьшить в $n$ раз?

**1296.** Найти площадь квадрата по сумме $S$ его диагоналей с периметром.

**1297.** Указать несколько теорем, при доказательстве которых используется аксиома параллельности.

**1298.** Катеты прямоугольного треугольника выражаются целыми числами. Какой длины они должны быть, чтобы сумма их численно равнялась площади треугольника.

**1299.** Указать треугольник, стороны которого и площадь выражаются соответственно четырьмя последовательными целыми числами.

**1300.** Площадь правильного шестиугольника равна $S$. Определить его периметр.

**1301.** Стороны правильных пятиугольника, шестиугольника и десятиугольника, вписанных в круг радиуса $R$, выражаются соответственно формулами

$$\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},\quad R \text{ и } \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Показать, что квадрат стороны пятиугольника равен сумме квадратов сторон шестиугольника и десятиугольника (задача Эвклида).

**1302.** Можно ли сложить паркет из правильных 10-угольников и 15-угольников?

**1303.** Доказать, что сумма расстояний любой точки внутри правильного многоугольника от всех его сторон есть величина постоянная.

**1304.** Может ли вписанный многоугольник иметь равные углы, но неравные стороны, или равные стороны, но неравные углы?

**1305.** Из каких правильных многоугольников различного вида можно сложить паркет?

**1306.** Можно ли описать окружность около любого четырехугольника?

**1307.** Рассматривая правильный вписанный 6-угольник и описанный квадрат, показать, что число $\pi$ удовлетворяет неравенству

$$3 < \pi < 4.$$

**1308.** Вычислить сторону правильного вписанного 12-угольника.

**1309.** Вычислить сторону правильного вписанного 15-угольника.

**1310.** Стороны правильного 5-угольника, вписанного в круг, продолжены до взаимного пересечения. Вычислить сумму пяти углов в точках взаимного пересечения.

**1311.** На окружности расположены четыре точки так, что длины дуг окружности, лежащих между этими точками, относятся между собой, как 1 : 2 : 4 : 5. Вычислить тупой угол, образованный прямыми, проведенными через каждые две несмежные точки.

**1312.** Основания трапеции соответственно равны $a$ и $b$; около нее описана и в нее вписана окружность. Вычислить высоту и боковые стороны трапеции.

**1313.** Сумма длин окружности и ее диаметра равна $l$. Найти площадь этого круга.

**1314.** Окружность разделена хордой в крайнем и среднем отношении. Найти площадь сектора, соответствующего меньшей из этих дуг окружности.

**1315.** Доказать, что площадь кругового кольца, заключенного между двумя концентрическими окружностями, равна площади круга, который имеет своим диаметром хорду большей окружности, касающуюся меньшей окружности.

**1316.** Стороны треугольника соответственно равны 12, 14 и 16 *см*. Из его вершин, как из центра, описаны окружности так, что каждая из них касается двух других. Найти радиусы окружностей.

**1317.** По данному радиусу $R$ и хордам $a$ и $b$ двух дуг круга определить хорду суммы этих дуг.

**1318.** Какое максимальное количество прямых линий можно провести через $n$ точек, расположенных на плоскости?

**1319.** Каждый угол куба, ребро которого равно $a$, срезан плоскостью, проходящей через середины ребер, выходящих из вершины срезываемого угла. Найти объем оставшегося тела.

**1320.** Найти объем правильного октаэдра, у которого вершины лежат в центре граней куба. Длина ребра куба равна $a$.

**1321.** Сумма объемов трех кубов, у которых длины ребер относятся, как $m : n : p$, равна $V$. Найти объемы этих кубов.

**1322.** Найти полную поверхность правильной пирамиды, у которой основание правильный треугольник, описанный около круга радиуса $r$, а объем, равный $V$, равновелик тройному объему куба, у которого ребро равно диаметру этого круга.

**1323.** В шар радиуса $R$ вписан куб. Найти его поверхность.

**1324.** Найти отношение объемов равностороннего цилиндра и равностороннего конуса, у которых полные поверхности равны между собой.

**1325.** Сколько существует правильных многогранников? Дайте определение каждого многогранника.

**1326.** Из полукруга радиуса $R$ свернута боковая поверхность конуса. Найти его объем.

**1327.** Рассказать биографию Н. И. Лобачевского.

### в) Тригонометрия

**1328.** В каких квадрантах сумма

$$\sin\alpha + \cos\alpha < 1.$$

**1329.** Определить знак $\cos 2$ и $\sin 2$.

**1330.** Что больше: $\operatorname{tg} 1$ или $\operatorname{tg} 1°$; $\sin 2$ или $\sin 2°$?

**1331.** Начертить графики функций:

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x;\ y = \sin x + \cos x.$$

**1332.** Найти период функции

$$y = \sin^2 x + \cos 3x.$$

**1333.** Найти период функции

$$y = 3\sin\frac{x}{2} + 4\left(\cos^2\frac{3}{4}x + \sin^2\frac{2}{3}x\right).$$

**1334.** Написать формулы для вычисления площади треугольника, используемые в тригонометрии, и доказать одну из них:

$$S_{\triangle} = p^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2},$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

**1335.** Вывод формулы

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\{\cos(m - n)x - \cos(m + n)x\}.$$

**1336.** Доказать теорему тангенсов; ее приложение к решению задач.

**1337.** Вывод формул

$$R = \frac{abc}{4S_{\triangle}} \quad \text{и} \quad r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{a}{2},$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

$R$ и $r$ — радиусы описанного и вписанного кругов.

**1338.** Вывод формулы общего вида углов, имеющих один и тот же синус.

**1339.** Привести к логарифмическому виду:

$$\sin\alpha \pm \cos\beta,\ 1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha,\ 3 - 4\cos^2\alpha.$$

**1340.** Основные способы решения тригонометрических уравнений.

**1341.** Понятие об обратных круговых функциях.
Их главные значения.

**1342.** Доказать, что

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

Для каких значений $x$ имеет место данное равенство?

**1343.** Доказать, что

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Для каких значений $x$ имеет место эта формула?

**1344.** Доказать, что

$$\operatorname{arc}\sin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

**1345.** Доказать, что

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

**1346.** Вычислить

$$\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 3^\circ \ldots \lg \operatorname{tg} 59^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 60^\circ.$$

**1347.** Решить неравенство $\sin \frac{1}{x} > 0$.

**1348.** Найти (приближенно) наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg} x = x.$$

## § 23. ТИПИЧНЫЕ ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ

### Вариант № 1

1. Доказать, что $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geqslant 4$, если $a > 0$, $b > 0$.

2. В прямоугольном треугольнике даны площадь $S$ и радиус вписанной окружности $r$. Найти катеты.

3. Решить неравенство: $\sin 2x + \cos 2x \leqslant -\sqrt{2}$.

4. В правильной $n$-угольной пирамиде боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $\alpha$. Найти углы треугольника, являющегося боковой гранью пирамиды.

(52, 1965)

### Вариант № 2

1. См. № 928.
2. См. № 723.
3. При каких значениях $k$ решение системы $x + ky = 3$, $kx + 4y = 6$ удовлетворяет неравенствам $x > 1$, $y > 0$?
4. В прямой треугольной призме, у которой $A$, $B$, $C$ — вершины нижнего основания, а $A''$, $B''$, $C''$ — соответствующие вершины верхнего основания, проведено сечение через сторону $BC$ и вершину $A''$. Площадь сечения равна $P$, а расстояние от него до вершины $B''$ равно $b$. Найти объем призмы.

(52, 1965)

### Вариант № 3

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y + z = 2axyz \\ x + z = 2bxyz \\ x + y = 2cxyz. \end{cases}$$

2. Решить уравнение $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x$.

3. $a$, $b$, $c$ — длины трех сторон треугольника ($a \geqslant b \geqslant c$). Треугольник со сторонами $a + x$, $b + x$, $c + x$ является прямоугольным Найти $x$ и определить его знак.

4. Три шара радиуса $R$ лежат на плоскости и касаются один другого. Найти радиус шара, касающегося трех данных и плоскости.

(52, 1965)

## Вариант № 4

1. Доказать, что $|1 + ab| \leqslant \sqrt{1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + b^2}$.

2. В прямоугольном треугольнике дан катет $a$ и биссектриса прямого угла $d$. Найти гипотенузу.

3. См. № 1042.

4. В правильной $n$-угольной пирамиде боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $\alpha$. Под каким углом к плоскости основания наклонены боковые грани.

(52, 1965)

## Вариант № 5

1. Решить уравнение $\frac{1}{2} \sin 2x + \sqrt{3} - \cos x = \sqrt{3} \sin^2 x$.

2. Пусть $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы треугольников $ABC$, $r$ — радиус вписанной окружности. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат точки касания.

3. Решить систему уравнений:

$$\frac{2x^2}{1 + x^2} = y, \quad \frac{2y^2}{1 + y^2} = z, \quad \frac{2z^2}{1 + z^2} = x.$$

4. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом $\alpha$ между диагоналями. Боковые ребра образуют с плоскостью основания угол $\varphi$. Определить объем пирамиды, если радиус описанного шара равен $R$.

(52, 1965)

## Вариант № 6

1. Пусть $x_1$, $x_2$ — корни уравнения $x^2 + 2kx + 4 = 0$. Найти все значения $k$, при которых справедливо неравенство

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \geqslant 3.$$

2. Найти все такие $\gamma$ и целые $\alpha$, для которых равенство

$$\sin \alpha x + \cos x = \gamma \sin\left(\alpha x + \frac{\pi}{4}\right)$$

справедливо для всех действительных $x$.

3. Доказать, что из всех трапеций с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

4. Через вершину конуса проведена плоскость под углом $\alpha$ к основанию конуса. Эта плоскость пересекает основание по хорде $AB$ длины $a$, стягивающей дугу основания конуса, которой соответствует центральный угол $\beta$. Найти объем конуса.

(52, 1965)

**Вариант № 7**

1. См. вариант № 3, задача № 2.

2. Из точки $A$ проведена касательная к окружности диаметра $d$. Найти расстояние от точки $A$ до центра окружности, если расстояние от точки $A$ до точки касания равно $d$.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = a \\ xy - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{a}. \end{cases}$$

4. Доказать, что $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{s_1}{s_2}$, где $v_1$ и $s_1$ — объем и поверхность треугольной пирамиды; $v_2$ и $s_2$ — объем и поверхность вписанного в эту пирамиду шара.

(52, 1965)

**Вариант № 8**

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^z = y^{\frac{8}{5}} \\ y^z = x^{\frac{2}{5}} \\ \dfrac{5}{9} z = \sqrt{x} + \sqrt{y}. \end{cases}$$

2. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен $\alpha$, а острый угол между катетом, прилегающим к этому углу, и медианой, опущенной на этот катет, равен $\varphi$. Показать, что $\varphi < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}$.

3. Решить уравнение $3 \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) + \operatorname{ctg} x = 0$.

4. Найти объем правильной $n$-угольной пирамиды, если ее полная поверхность равна $s$, а радиусы кругов, описанных вокруг всех граней, равны.

(52, 1965)

**Вариант № 9**

1. В шар вписан правильный тетраэдр, затем в тетраэдр снова вписан шар. Найти отношение поверхностей двух этих шаров.

2. Решить уравнение $1 - \sin 4x = \left(\sin \dfrac{7x}{2} - \cos \dfrac{7x}{2}\right)^2$.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{10}{3} \\ xy - 2x - 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

4. Велосипедист, выезжающий из $A$ в $B$, должен приехать в $B$ через 3 часа. Одновременно с ним из пункта $C$ выезжает другой велосипедист, и чтобы успеть приехать в $B$ вместе с первым велосипедистом, он должен каждый километр проезжать на 1 мин. быстрее, чем первый. Расстояние от $C$ до $B$ на 6 *км* больше расстояния от $A$ до $B$. Определить эти расстояния.

(52, 1964)

## Вариант № 10

1. В конус вписаны два шара радиусов $R$ и $r$ ($R > r$), касающиеся один другого. Найти часть поверхности конуса, заключенную между линиями, по которым конус касается этих шаров.

2. Сколько можно сделать из $n$ элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таких перестановок, в которых элементы $a_1$ и $a_n$ не стоят рядом?

3. Объем правильной треугольной призмы равен $v$, угол между диагоналями двух граней, проведенных из одной и той же вершины, равен $\alpha$. Найти сторону основания призмы.

4. Решить уравнение $2\sqrt{3 \sin x} = \dfrac{3 \operatorname{tg} x}{2\sqrt{\sin x - 1}} - \sqrt{3}$.

(52, 1963)

## Вариант № 11

1. См. № 409.

2. В треугольник, стороны которого относятся как $m : n : p$, вписан круг. Найти отношение, в котором точка касания делит каждую сторону.

3. Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания $a$ и двугранным углом при основании $2\alpha$ пересечена плоскостью, делящей пополам этот угол. Найти площадь полученного сечения.

4. Решить уравнение $\sin^{29} 3x - \cos^{17} 10x = 2$.

(52, 1963)

## Вариант № 12

1. Найти все решения уравнения $2 \sin 5x \cos x + \sin 2x = 0$.

2. В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы отливают в пробирку $\dfrac{1}{n}$-ю часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не увеличится втрое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате процентное содержание соли в колбе повышается на $p\%$. Определить исходное содержание (в процентах) соли в колбе.

3. См. № 1198.

4. Показать, что если $p$ и $q$ — нечетные числа, то уравнение $x^2 + px + q = 0$ не может иметь рациональных корней.

(52, 1964)

**Вариант № 13**

1. См. № 46.
2. В правильной треугольной пирамиде вершина основания находится от противолежащей боковой грани на расстоянии, равном $b$. Найти полную поверхность конуса, вписанного в данную пирамиду, зная, что апофема пирамиды наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$.
3. См. № 1027.
4. См. № 179.

(50, 1963)

**Вариант № 14**

1. См. № 33.
2. Доказать, что если из точки пересечения диагоналей ромба опустить перпендикуляры на его стороны и соединить основания этих перпендикуляров, то получится прямоугольник.
3. Решить уравнение

$$\sin x - \cos x - 4\cos^2 x \sin x = 4\sin^3 x.$$

4. Доказать неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} \geqslant 125$.

(50, 1962)

**Вариант № 15**

1. Лодка опускается по течению реки на расстояние 10 *км*, а затем поднимается против течения реки на расстояние 6 *км*. Скорость течения реки равна 1 *км/час*. В каких пределах должна быть собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 3 до 4 часов?
2. Найти угол между ребром и гранью правильного тетраэдра.
3. Доказать неравенство $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2$.
4. Решить уравнение $\sin x \operatorname{tg} x + 2\cos x = a$.

(50, 1963)

**Вариант № 16**

1. Две автомашины вышли одновременно из одного и того же пункта в одном и том же направлении. Скорость первой машины $a$ *км/час*, второй — $b$ *км/час*. Спустя полчаса из того же пункта выехала третья машина и, догнав вторую, двигалась еще 1,5 часа до того, как нагнала первую. Какова скорость третьей машины, если движение всех машин равномерное?
2. Найти $x$ и $y$, если

$$C_x^{y-1} : \left(C_{x-2}^{y} + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1}\right) : C_x^{y+1} = 3 : 5 : 5.$$

3. Основания высот остроугольного треугольника соединены между собой. Найти периметр полученного треугольника, если стороны данного треугольника равны $a$, $b$ и $c$.

4. Один из плоских углов трехгранного угла равен $\alpha$; двугранные углы, прилежащие к этому плоскому углу, равны, соответственно $\beta$ и $\gamma$. Найти два других плоских угла.

5. Решить уравнение и исследовать решения:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0.$$

(2, 1958)

**Вариант № 17**

1. Часы показывают в некоторый момент на $m$ минут меньше, чем следует, хотя и спешат. Если бы они показывали на $n$ минут меньше, чем следует, но уходили бы в сутки на $t$ минут больше, чем уходят, то верное время они показали бы на сутки раньше, чем покажут. На сколько минут в сутки спешат часы?

2. Найти значение $x$ в выражении

$$\left(\frac{1}{x^{2(\lg x+1)}} + \sqrt[12]{x}\right)^6,$$

четвертый член разложения которого равен 200.

3. Решить уравнение $\sin 3x + \sin 2x - n \sin x = 0$ и исследовать решения.

4. Два круга с радиусами $R$ и $r$ касаются извне. Определить радиус круга, касательного к ним, и их общей внешней касательной.

5. В правильной четырехугольной пирамиде двугранные углы между боковыми гранями равны $\beta > \frac{\pi}{2}$. Найти плоские углы при вершине.

(2, 1958)

**Вариант № 18**

1. Два туриста одновременно отбывают из пункта $A$ и следуют в пункт $B$. Считается, что туристы прибыли в пункт $B$, если туда прибыл последний из них. В распоряжении туристов имеется один велосипед, который они могут оставлять на дороге требуемое время и на котором попеременно может ехать любой из них, но одновременно вдвоем туристы не могут ехать на велосипеде. Нужно распорядиться велосипедом таким образом, чтобы время следования туристов в пункт $B$ было наименьшим. Найти это время, если скорость пешехода равна $v$, скорость велосипедиста втрое больше и расстояние между пунктами $A$ и $B$ равно $s$.

2. Найти $x$ в выражении $\left(\sqrt[6]{x} + x^{\frac{1}{\log x+5}}\right)^7$, пятый член разложения которого равен 350.

3. См. № 1050.

4. Три круга радиусов $r$, $2r$, $2r$ попарно внешне касаются один другого. Прямые, каждая из которых касается двух окружностей, но не пересекает их, образуют треугольник. Найти высоту треугольника, которая опущена на большую сторону.

5. В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Найти радиус шара, если длина стороны основания пирамиды равна $l$ и высота пирамиды равна $h$.

(2, 1963)

**Вариант № 19**

1. Сосуд, содержащий $p\%$-ный раствор кислоты, долили доверху $q\%$-ным раствором кислоты и после перемешивания отлили то же количество. Проделав эту операцию $k$ раз, получили $r\%$-ный раствор. Какую часть объема сосуда занимала первоначально кислота в сосуде.
2. Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если в обозначение каждого числа каждая из данных цифр входит не более одного раза.
3. В треугольнике даны стороны $b$ и $c$ и угол между ними $\alpha$. Этот треугольник вращается около оси, которая проходит вне его через вершину угла $\alpha$ и равно наклонена к сторонам $b$ и $c$. Определить объем тела вращения.
4. См. № 721.
5. См. № 882.

(2, 1963)

**Вариант № 20**

1. См. № 677.
2. Определить удельный вес каждого из двух металлов, если сплав, содержащий 900 *г* первого металла и 2,4 *кг* второго, имеет объем 400 *см*$^3$, а сплав, полученный из куска первого металла, имеющего объем 200 *см*$^3$, и куска второго металла с объемом 300 *см*$^3$ весит 4,2 *кг*.
3. См. № 252.
4. См. № 567.

(36, 1950)

**Вариант № 21**

1. Доказать, что сумма диаметров окружностей, вписанной в прямоугольный треугольник и описанной около него, равна сумме его катетов.
2. Прямоугольник вращается около оси, проходящей через его вершину перпендикулярно к его диагонали. Определить объем и поверхность тела вращения, если угол между диагоналями прямоугольника равен $\alpha$, а большая сторона прямоугольника равна $a$.
3. Доказать равенство

$$\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}}+\arcsin\frac{3}{\sqrt{11}}=\frac{\pi}{2}.$$

(36, 1950)

**Вариант № 22**

1. См. № 1158.
2. Решить неравенство $(3x+1)(x-1)\leqslant 3$.
3. Решить уравнение $4\cos^2 x+\sin x\cos x+3\sin^2 x=3$.

(51, 1965)

**Вариант № 23**

1. Образующая конуса равна $l$ и образует с плоскостью основания угол $\alpha$. Найти площадь сечения конуса с плоскостью, проходящей через вершину конуса и образующей с плоскостью основания угол $\beta$.

2. Решить неравенство $25x^4 - 121x^2 - 20 \geqslant 0$.

3. Решить уравнение $\sin x + \cos \frac{x}{2} = 0$.

(51, 1965)

**Вариант № 24**

1. См. № 677.

2. В трапеции $ABCD$ диагональ $AC = 18$ *см* наклонена к основанию $AD$ под углом в 60° и делит диагональ $BD$ на отрезки $OB = 8$ *см*, $DO = 16$ *см*. Вычислить длину основания $AD$.

3. Показать, что

$$(1-m^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1+m^2(1-m^2)^{-1}} \cdot \frac{(1-m^2)^{\frac{1}{2}} + m^2(1-m^2)^{-\frac{1}{2}}}{1-m^2},$$

не зависит от $m$.

4. Решить уравнение $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$.

(20, 1956)

**Вариант № 25**

1. Число 100 разделить на 3 части так, чтобы первая часть относилась ко второй, как $\frac{3}{4} : 1$, а вторая к третьей, как $5 : \frac{1}{2}$.

2. См. № 698.

3. Решить уравнение $2 \log_x 3 \cdot \log_{3x} 3 = \log_{9\sqrt{x}} 3$.

4. Решить уравнение $\sin x \sin 3x = 0{,}5$.

(20, 1956)

**Вариант № 26**

1. См. № 675.

2. Теплоход, развивающий скорость 20 *км/час*, прошел расстояние между пристанями туда и обратно, не останавливаясь, за 6 часов 15 минут. Расстояние между пристанями 60 *км*. Какова скорость течения реки?

3. Решить уравнение $x^3 + 2x^2 - 2x + 3 = 0$.

4. Доказать тождество $\operatorname{tg} 10° \cdot \operatorname{tg} 50° \cdot \operatorname{tg} 70° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(20, 1956)

**Вариант № 27**

1. Вычислить $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$, при $x = \frac{2ab}{b^2+1}$ и $b < 1$.

2. В окружность $A$ вписаны три круга одинакового радиуса, касающиеся один другого и окружности $A$. Через центры этих окружностей проведена окружность $B$. Найти отношение площади круга $B$ к площади круга $A$.

3. Решить уравнение $\sin x + \cos x = \sec x + \operatorname{cosec} x$.

(35, 1965)

**Вариант № 28**

1. См. № 632.

2. В треугольнике $ABC$ угол $A$ вдвое больше угла $B$, $AB = c$ и $AC = b$. Определить третью сторону $BC$.

3. Решить уравнение

$$(\sin x + \cos x)^2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

(35, 1965)

**Вариант № 29**

1. См. № 1152.

2. При каких значениях $a$ неравенство $x^2 + 2x + a > 0$ будет справедливо при любых значениях аргумента?

3. Доказать, что

$$\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$$

(51, 1963)

есть точный квадрат.

**Вариант № 30**

1. См. № 1146.

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{9}{4}\right)^y \\ xy - 10y + 12 = 0. \end{cases}$$

3. Доказать тождество

$$\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 0{,}25 \sin^2 2\alpha.$$

(51, 1963)

**Вариант № 31**

1. Равносторонний конус вписан в шар. Найти объем шара, если боковая поверхность конуса равна $S$.

2. См. № 560.

3. См. № 955.

4. Вычислить $1000^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} - (625)^{-0{,}75}$.

(48, 1965)

**Вариант № 32**

1. См. № 1147.
2. См. № 562.
3. См. № 912.
4. См. № 92.

(48, 1965)

**Вариант № 33**

1. В усеченном конусе высота равна $h$, образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол $\alpha$ и перпендикулярна к диагонали осевого сечения, проходящей через верхний конец этой образующей. Определить боковую поверхность усеченного конуса.

2. Решить уравнение $2^{x+3} - (0{,}5)^{-x} + 2^{x-2} = 29$.

3. Доказать тождество

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}.$$

(48, 1965)

4. См. № 95.

**Вариант № 34**

1. См. № 1167.
2. См. № 596.
3. См. № 938.
4. См. № 676.

(48, 1965)

**Вариант № 35**

1. Основанием пирамиды служит треугольник с тупым углом $\alpha$, две стороны которого длины $a$ являются проекциями двух боковых ребер. Одна из боковых граней составляет угол $\beta$ ($\beta \neq 90°$) с плоскостью основания. В пирамиду вписана прямая треугольная призма с высотой, равной половине большей стороны основания, так что одно из оснований призмы лежит в плоскости основания пирамиды. Найти объем призмы.

2. Упростить

$$\frac{\left(a^{-\frac{1}{2}} - n^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}}{\dfrac{a^2\sqrt{c} - n^{\frac{3}{2}}\sqrt{ac} - 3an\sqrt{c}\left(a^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right)}{n\sqrt{a} - a\left(2n^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}\right)}}.$$

3. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$\frac{\sin\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\alpha}{\sin\frac{4}{3}\alpha} - \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{3}\right)}{\sin\frac{2}{3}\alpha}.$$

(9, 1965)

**Вариант № 36**

1. В шар радиуса $R$ вписана правильная треугольная пирамида. Определить объем пирамиды, если боковое ее ребро наклонено к основанию под углом $\alpha$.

2. Вычислить

$$\frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x}}+\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2-x}}, \quad \text{при } x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

3. Доказать тождество

$$\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha-\cos^2\alpha}{2(\cos\alpha-1)}=\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

(9, 1965)

**Вариант № 37**

1. В конус, образующая которого с плоскостью основания составляет угол $\alpha$, вписана правильная четырехугольная призма, диагональ основания которой равна $d$, а высота $\frac{d}{2}$. Определить объем и полную поверхность конуса.

2. Упростить выражение:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{4}}}{1+x^{-\frac{1}{4}}}-\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\sqrt{x^4-16}}{\sqrt{3}}:\frac{(x^2+4)^{\frac{1}{2}}-x^2-4}{\sqrt{9(x^2+4)}-3}\right].$$

3. Упростить:

$$\sin^2\frac{3\pi}{2}+\left[\frac{\sqrt{2}-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\right]^2.$$

(9, 1965)

**Вариант № 38**

1. Основанием треугольной пирамиды является прямоугольный треугольник с острым углом $\alpha$ ($\alpha<45°$), через вершину прямого угла которого проходит высота пирамиды. Зная биссектрису $b$ прямого угла меньшей боковой грани и наименьший плоский угол $\beta$ при вершине пирамиды, найти ее объем.

2. Вычислить

$$\frac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}, \quad \text{если } \operatorname{tg}\alpha=-7;\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$$

3. Упростить выражение:

$$\frac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a^2+b\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}\log_3 27.$$

(9, 1965)

## Вариант № 39

1. Упростить выражение:

$$\frac{a\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\dfrac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}.$$

2. Решить уравнение:

$$\frac{(a-x)^3+(x-b)^3}{(a-x)^2+(x-b)^2}=a-b.$$

(6, 1958)

## Вариант № 40

1. Упростить выражение:

$$\left[\frac{\left(a+\sqrt[3]{a^2x}\right):\left(x+\sqrt[3]{ax^2}\right)-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]^6.$$

2. Решить уравнение:

$$5\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{3\sqrt{10x}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}},$$

при условии, что $x \geqslant 1$.

(6, 1958)

## Вариант № 41

1. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x=4\sin x.$$

2. Из вершины конуса, как из центра, описана внутри него сферическая поверхность, касательная к основанию конуса. Определить угол при вершине осевого сечения этого конуса, если указанная поверхность делит его объем пополам.

(6, 1958)

**Вариант № 42**

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = \frac{5}{3}(x - y) \\ xy = x^2y^2. \end{cases}$$

2. Решить уравнение:

$$\lg 2 + \lg (4^{x-2} + 9) = 1 + \lg (2^{x-2} + 1).$$

3. В разложении степени бинома

$$(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^{-5}})^n$$

разность коэффициентов третьего и второго членов равна 77. Найти член, не зависящий от $x$.

(31, 1957)

**Вариант № 43**

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y) = 65 \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$$

2. В арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_{31}$ дано $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{31} = 784$. Вычислить сумму $a_1 + a_6 + a_{11} + \cdots + a_{31}$.

3. Решить уравнение:

$$-\log_3 \log_8 \log_2 x = 1 - \log_3 2.$$

(31, 1957)

**Вариант № 44**

1. В бассейн проведены две трубы. Через первую вода вливается, через вторую — вытекает. При совместном действии обеих труб бассейн наполняется за 6 час. Если бы первая труба наполняла бассейн часом дольше, а вторая опоражнивала его часом дольше, то при совместном действии обеих труб бассейн наполнился за 12 час. За сколько часов первая труба наполняет бассейн, а вторая опоражнивает?

2. В равнобедренный треугольник вписан круг радиуса $R$. Найти периметр треугольника, если угол между равными сторонами треугольника равен $\alpha$.

3. Упростить выражение:

$$\left[(x - y) \cdot \frac{x - \dfrac{x^2y - y^2}{x + y + xy}}{x + y - \dfrac{xy}{x + y}} - \frac{x^2 - y^2}{(x + y)^2 + x^2y + xy^2}\right] : \frac{x^3 + x^2y - x^2 - xy^2 - y^3 + y^2}{x + xy + y}.$$

4. Решить уравнение:

$$\sin\left(5x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x-\pi).$$

(49, 1961)

**Вариант № 45**

1. Упростить выражение:

$$\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right).$$

2. Решить уравнение:

$$\frac{\frac{3}{2}\lg 3+\lg(x+1)}{\lg(5x-1)+\lg(x+3)+\lg 6}=\frac{1}{2}.$$

3. Дано $\sin\alpha=0{,}8$, $\cos\beta=-\frac{5}{13}$, $\alpha$ и $\beta$ — тупые углы. Вычислить $\cos(2\alpha-\beta)$.

4. Площадь равнобедренного треугольника равна $Q$, а угол при вершине $\alpha$. Вычислить поверхность тела, образованного вращением этого треугольника около прямой, перпендикулярной к основанию и проходящей через один из его концов.

(17, 1958)

**Вариант № 46**

1. Со станции $A$ в 5 час. утра вышел почтовый поезд по направлению к станции $B$, отстоящей от $A$ на 1080 *км*. В 8 час. утра со станции $B$ по направлению к станции $A$ вышел скорый поезд, который проходил в час на 15 *км* больше, чем почтовый. Поезда встретились на середине пути $AB$. Когда они встретились?

2. Решить уравнение:

$$\frac{1}{\log_x 8}+\frac{1}{\log_{2x}8}+\frac{1}{\log_{4x}8}=2.$$

3. Решить уравнение:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=0{,}25.$$

4. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $a$, двугранный угол при основании равен $\beta$. Пирамида пересечена плоскостью, проведенной через центр вписанного шара параллельно основанию. Определить площадь сечения.

(14, 1960)

**Вариант № 47**

1. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла является одновременно биссектрисой угла между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла.

2. Решить неравенство:

$$2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a > 0,$$

где $a > 1$.

3. Доказать, что для $x \neq k \cdot 90°$ ($k$ — целое число) выполняется неравенство:

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x \geqslant 2.$$

4. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны $b$, а основание $a$. Двугранные углы между боковыми гранями и основанием пирамиды равны $\alpha$. Определить объем пирамиды.

(46, 1961)

## § 24. ОБРАЗЦЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

### Билет № 1

1. Прямая и обратная пропорциональные зависимости величин.
2. Теорема о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника.
3. Вывести формулы:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = ?$$

(2, 1956)

### Билет № 2

1. Вывод формулы

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$m$ и $n$ — рациональные дроби.

2. Объем шарового сектора.
3. Определение площади треугольника: а) по двум сторонам и углу, заключенному между ними; б) по стороне и двум прилежащим к ней углам.

(2, 1956)

### Билет № 3

1. Решение неравенств второй степени с одним неизвестным.
2. Формула площади треугольника по трем сторонам.
3. Приведение тригонометрических функций произвольного аргумента к тригонометрическим функциям острого угла.

(2, 1956)

### Билет № 4

1. Доказать теоремы о метрических соотношениях в прямоугольном треугольнике.

2. Десятичные логарифмы. Характеристика и мантисса.
3. Разложить на множители:

$$2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2.$$

4. Решить уравнение

$$4 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 x = 9.$$

(35, 1956)

**Билет № 5**

1. Теорема о диаметре, перпендикулярном хорде, и обратная теорема.
2. Теорема Пифагора (алгебраическое доказательство).
3. Теоремы (прямые и обратные) о зависимости между двугранными и их линейными углами.
4. Вывести формулу синуса суммы двух углов.
5. Решить уравнение:

$$2 \sin^2 x = 3 \sin x.$$

(12, 1948)

**Билет № 6**

1. Алгебраическое выражение. Одночлен. Многочлен. Коэффициент.
2. Формула бинома Ньютона и ее свойства.
3. Упростить выражение:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}\right) : \left(\sqrt[-2]{1-x^2} + 1\right).$$

4. Найти сумму $n$ членов натурального ряда чисел.
5. Доказать, что

$$3^{\frac{1}{\log_5 3}} = 5.$$

(12, 1948)

**Билет № 7**

1. Зависимость между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами.
2. Подобие многоугольников.
3. Объем усеченной пирамиды.
4. Вывод формулы тангенса суммы двух углов.

(12, 1957)

**Билет № 8**

1. Свойство перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу.
2. Поверхность шара и шарового сегмента.
3. График функции: $y = \sin x$. Периодичность синуса.

(6, 1955)

**Билет № 9**

1. Приближенное извлечение корня с точностью до $\frac{1}{10^n}$. Действия с приближенными числами.

2. График показательной функции. Способы решения показательных и логарифмических уравнений.

3. Найти $x$ и $y$ из равенства

$$(3i - 8)\,x + (2i - 5)\,y = i,$$

где $x$ и $y$ — вещественные числа.

(6, 1955)

**Билет № 10**

1. См. № 137.

2. Решить уравнение

$$2\cos^2 x + \sin^2 x = 3\sin x \cos x.$$

3. Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, ее заключающих, и больше разности между этой полусуммой и половиной третьей стороны.

(30, 1958)

**Билет № 11**

1. Упростить:

$$\frac{2\sqrt[12]{1-x}\cdot 0{,}4\sqrt[4]{\frac{4}{1-x}}\cdot 3\sqrt[3]{4-8x+4x^2}\cdot 1\frac{1}{4}}{\sqrt{4-4x}}.$$

2. В равнобедренной трапеции большее основание равно 44 *м*, боковая сторона 17 *м*, а диагональ равна 39 *м*. Определить площадь этой трапеции.

3. Вывод формулы бинома Ньютона.

(16, 1958)

**Билет № 12**

1. Вычислить:

$$\frac{(1+i)^3}{(2-3i)^2}\cdot\left(\frac{3-i}{2+i}-\frac{2-i}{3+i}\right).$$

2. В треугольнике основание равно 12 *см*, один из углов при нем равен 120°, сторона против этого угла равна 28 *см*. Определить третью сторону.

3. Градусное и радианное измерение углов.

(16, 1958)

**Билет № 13**

1. Вычислить сумму:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+$$

$$+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}.$$

2. Известно, что

$$\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi=a.$$

Найти $\sin\varphi$.

3. В усеченном конусе высота равна $h$; образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол $\alpha$ и перпендикулярна к линии, соединяющей верхний конец ее с нижним концом противоположной образующей. Определить боковую поверхность этого усеченного конуса.

(30, 1958)

**Билет № 14**

1. Доказать, что при любых вещественных значениях $a$, $p$ и $q$ уравнение

$$\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}=\frac{1}{a^2}$$

имеет вещественные корни.

2. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}x=2\cos\frac{x}{2}.$$

3. Доказать, что угол треугольника будет острым, прямым или тупым, если противоположная сторона будет меньше, равна или больше удвоенной соответствующей медианы.

(30, 1958)

**Билет № 15**

1. Шар. Сечение шара плоскостью. Касательная плоскость к шару.

2. Мнимое число. Комплексное число. Комплексные числа в алгебраической форме и четыре действия над ними. Условия равенства двух комплексных чисел.

3. $y=\cos x$. Изменение этой функции. График функции.

4. Точка лежит вне круга на расстоянии диаметра от центра. Определить угол между касательными, проведенными из данной точки к данной окружности.

(33, 1958)

**Билет № 16**

1. Построение отрезка $x$ по формулам:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad x = \frac{ab}{c}; \quad x = \frac{a^2}{c}; \quad x = \sqrt{ab}.$$

2. Равносильные неравенства. Теорема о равносильности неравенств при прибавлении к обеим частям неравенства одного и того же числа.
3. Решение косоугольных треугольников для случая, когда даны три стороны: $a$, $b$, $c$.
4 Вычислить:

$$3 \sin 15° \cos 15° + \frac{\sin 60°}{\sin^4 15° - \cos^4 15°}.$$

(33, 1958)

**Билет № 17**

1. Теорема Безу о делимости целого полинома на $x - a$; следствия теоремы.
2. Найти тот член разложения бинома

$$\left(z\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^m,$$

который после упрощений содержит $z^5$, если сумма биномиальных коэффициентов этого разложения равна 128.
3. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} 4x - \operatorname{ctg} 18x = 0.$$

(17, 1958)

**Билет № 18**

1. Тождества и уравнения. Теоремы о равносильности уравнений.
2. Упростить выражение:

$$\frac{P_{2x+1}}{A^{n-1}_{2x-1} \cdot P_{2x-n}}.$$

3. Решить уравнение:

$$\sin x + \cos x = \cos 2x.$$

(17, 1958)

# Часть V

# ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД[1]

## § 25. ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 6—7-Х КЛАССОВ (II ТУР)

### Вариант № 1 (6-й класс)

1. На 10 руб. куплены марки по 3 и 5 коп., причем 5-копеечных марок на 16 штук больше, чем 3-копеечных. Сколько каких марок купили?

2. Имеются две бочки емкостью 200 000 *л* каждая, наполовину наполненных водой. Как, используя ковши емкостью 2,1 *л* и 3,4 *л*, перелить из первой бочки во вторую 1 *л* воды (разрешается полностью наполнять ковш водой из одной бочки и целиком переливать эту воду во вторую бочку)?

(1966)

### Вариант № 2 (6-й класс)

1. Книгу уценили на 10%, затем еще на 20%. Сейчас книга стоит 1 руб. 80 коп. Сколько книга стоила вначале?

2. Можно ли на 10 руб. продать марки по 12 и 15 коп. так, чтобы при этом не пришлось давать сдачу?

(1966)

### Вариант № 3 (7-й класс)

1. Построить равнобедренный треугольник по высоте (проведенной к основанию) и периметру.

2. Разложить на множители выражение

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3.$$

(1961)

### Вариант № 4 (7-й класс)

1. Разложить на два множителя с целыми коэффициентами многочлен $x^5 + x^4 + 1$.

2. Разделить на три равные части угол, равный $\frac{2}{7}$ прямого, используя только циркуль и линейку.

---

[1] В данном разделе приведены задачи, предлагавшиеся учащимся в разные годы на математических олимпиадах г. Ленинграда.

3. Внутри равнобочной трапеции выбрана точка. Доказать, что из отрезков, соединяющих эту точку с вершинами трапеции, можно сложить выпуклый четырехугольник.

(1966)

**Вариант № 5 (7-й класс)**

1. Разложить на два множителя с целыми коэффициентами многочлен $x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$.

2. Разделить угол в 72° на три равные части, используя лишь циркуль и линейку.

3. Построить треугольник по стороне и двум медианам, проведенным к остальным двум сторонам.

(1966)

**Вариант № 6 (7-й класс)**

1. Разложить на два множителя с целыми коэффициентами многочлен $x^8 + x + 1$.

2. Разделить угол в 7° на 7 равных частей, используя лишь циркуль и линейку.

3. Построить ромб по периметру и сумме диагоналей.

(1966)

## § 26. ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 8—9-Х КЛАССОВ (II ТУР)

**Вариант № 7 (8-й класс)**

1. Доказать, что $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ делится на 24 при любом целом $n$?

2. В треугольнике $ABC$ проведены высоты $AD$ и $CE$. Доказать, что треугольники $BDE$ и $ABC$ подобны?

(1957)

**Вариант № 8 (8-й класс)**

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - (y - z)^2 = a^2 \\ y^2 - (z - x)^2 = b^2 \\ z^2 - (x - y)^2 = c^2. \end{cases}$$

2. Через вершину $A$ квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая продолжения сторон $BC$ и $CD$ в точках $M$ и $N$. Доказать, что

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

(1957)

**Вариант № 9 (8-й класс)**

1. Решить уравнение:

$$\frac{(x-a)^2+(x-b)^2}{(x-a)^2-(x-b)^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}; \quad a^2-b^2\neq 0.$$

2. В треугольник, основание которого равно 2, а периметр — 8, вписан круг. Определить длину отрезка касательной, проведенной к кругу, параллельно основанию треугольника.

(1958)

**Вариант № 10 (8-й класс)**

1. Квадратный трехчлен $ax^2+bx+c$ при $x=1$ равен нулю, при $x=2$ равен 1, при $x=3$ равен 4. Доказать, что тогда при любом значении $x$ квадратный трехчлен равен $(x-1)^2$.

2. Даны два круга радиусов 6 и 3, один вне другого. Определить расстояние их внешней касательной от точки пересечения их общих внутренних касательных.

(1958)

**Вариант № 11 (8-й класс)**

1. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\frac{1+2\sqrt{35}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}}.$$

2. Основания равнобедренной трапеции 3 и 12. Середина большего основания соединена с концами меньшего основания прямыми, которые пересекают диагонали трапеции в двух точках. Найти расстояние между этими точками.

(1958)

**Вариант № 12 (8-й класс)**

1. См. № 123.

2. Построить параллелограмм, две смежные вершины которого лежат в двух данных точках, а две другие — на данной окружности.

3. Доказать, что при любом целом $m$ число

$$\frac{3m-5}{12}\cdot m\,(m-1)\,(m-2)$$

будет целым.

(1961)

**Вариант № 13 (8-й класс)**

1. Построить трехугольник, если известны 3 точки, являющиеся центрами его вневписанных окружностей.

2. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_8 + 2x_9 + x_{10} = 0 \\ x_9 + 2x_{10} = 11. \end{cases}$$

3. См. вариант № 6, задача № 2.

(1966)

**Вариант № 14 (8-й класс)**

1. Построить треугольник $ABC$, если заданы прямая, на которой лежит биссектриса угла $C$, и две точки пересечения высоты, проведенной из вершины $A$, с вписанной в этот треугольник окружностью.

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_8 + x_9 + 2x_{10} = 340 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_8 + 3x_9 + x_{10} = 340 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + 2x_8 + x_9 + x_{10} = 340 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \dots + x_8 + x_9 + x_{10} = 340 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_8 + x_9 + x_{10} = 340. \end{cases}$$

3. В окружность вписан правильный семиугольник. Вписать в эту же окружность правильный 21-угольник, используя лишь циркуль и линейку.

(1966)

**Вариант № 15 (9-й класс)**

1. В арифметической прогрессии сумма $n$ ее первых членов равна $n^2 + 5n$ при любом $n$. Определить 10-й член прогрессии.

2. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка $O$. Доказать, что сумма площадей треугольников $AOB$ и $COD$ равна сумме площадей треугольников $BOC$ и $AOD$.

(1950)

**Вариант № 16 (9-й класс)**

1. Найти геометрическое место точек касания двух окружностей, которые касаются данной прямой в двух заданных точках.

2. Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}.$$

3. См. вариант № 12, задача № 3.

(1961)

*

**Вариант № 17 (9-й класс)**

1. Доказать, что неравенство $x^3 + 8y^3 \geqslant 6xy^2$, справедливо при $x > 0$, $y \geqslant 0$.

2. См. вариант № 13, задача № 1.

3. В последовательности $u_1$, $u_2$, $u_3$, . . ., $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 1$, а каждый следующий, начиная с шестого, равен сумме четвертых степеней пяти предыдущих.

Какой остаток при делении на 5 дает $u_{1966}$?

(1966)

**Вариант № 18 (9-й класс)**

1. Доказать, что для любых положительных $x$ и $y$

$$\sqrt[3]{(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \leqslant \sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

2. Пусть $h_1$, $h_2$, $h_3$ — высоты треугольника, $r$ — радиус вписанной в него окружности.

Доказать: $\frac{2}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$.

3. В последовательности $u_1$, $u_2$, $u_3$, . . ., $u_1 = u_2 = 1$, а каждое число, начиная с третьего, есть сумма квадратов двух предыдущих. Делится ли на 7 $u_{1966}$?

(1966)

**Вариант № 19 (9-й класс)**

1. Доказать, что для любых положительных $a$ и $c$

$$a^3 + 2c^3 \geqslant \frac{5}{2} ac^2.$$

2. Медианы треугольников имеют длины 9, 12, 15. Чему равна площадь треугольника?

3. Доказать, что 22-угольник нельзя разрезать на 7 пятиугольников.

(1966)

**Вариант № 20 (9-й класс)**

1. Доказать, что для любых положительных чисел $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ выполняется неравенство

$$(x_1^2+1)(x_2^2+2)(x_3^2+4)(x_4^2+8) \geqslant (x_1x_3+2)(x_2x_4+4).$$

2. Доказать, что если радиусы двух вневписанных окружностей треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

3. Доказать, что 17-угольник нельзя разрезать на 12 четырехугольников таких, что их вершины либо совпадают с вершинами 17-угольника, либо лежат внутри его, причем ни одна из вершин какого-либо четырехугольника не может быть внутренней точкой стороны другого четырехугольника.

(1966)

## § 27. ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10—11-х КЛАССОВ (II ТУР)

### Вариант № 21

1. Доказать тождество:

$$\frac{1}{1!\,(n-1)!}+\frac{1}{3!\,(n-3)!}+\frac{1}{5!\,(n-5)!}+\cdots=\frac{2^{n-1}}{n!}.$$

2. Доказать, что четыре прямые, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан его противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся в отношении 1 : 3.

3. Решить уравнение:

$$32\cos^6 x-\cos 6x=1.$$

(1950)

### Вариант № 22

1. В правильном тетраэдре середина высоты соединена прямыми с вершинами основания. Доказать, что эти прямые взаимно перпендикулярны.

2. Найти вещественные корни системы уравнений:

$$\begin{cases}(x+y)^5=x^5+y^5\\ x^3+x^2y+3x^2+3y^2+3x-4y+1=0.\end{cases}$$

3. Расположить в порядке возрастания ряд чисел

$$\sin 1,\ \sin 3,\ \sin 5,\ \sin 7,\ \sin 9.$$

(1959)

### Вариант № 23

1. Пусть $a$, $b$ и $c$ — длины сторон треугольника. Доказать, что тогда из отрезков длины $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$ также можно построить треугольник.

2. Через ребро $SA$ треугольной пирамиды $SABC$ проводится биссектральная плоскость двугранного угла, образованного гранями $SAB$ и $SAC$. Ребро $BC$ делится этой плоскостью на два отрезка длины $b$ и $c$. Доказать, что площади граней $SAB$ и $SAC$ относятся как $c$ к $b$.

3. Чему равна сумма

$$\lg(2\operatorname{tg}1^\circ)+\lg(2^3\operatorname{tg}3^\circ)+\cdots+\lg(2^{89}\operatorname{tg}89^\circ).$$

(1960)

### Вариант № 24

1. Доказать, что при соединении трех вершин правильного тетраэдра с серединой высоты, опущенной из четвертой вершины, получающиеся отрезки будут попарно перпендикулярны.

2. Доказать, что

$$a^4+b^4\geqslant 2ab^3,$$

если $a\geqslant b\geqslant 0$.

3. Найти сумму всех таких пятизначных чисел, в которых каждая из цифр 5, 6, 7, 8, 9 встречается ровно по одному разу в каждом числе.

1961)

**Вариант № 25**

1. На сторонах двугранного угла в 45° расположены точки $A$ и $B$. Расстояния $AA'$ и $BB'$ от этих точек до ребра двугранного угла одинаковы и равны $b$. Найти длину отрезка $A'B'$ на ребре двугранного угла, если известно, что расстояние в пространстве между точками $A$ и $B$ равно $a$.

2. Доказать, что

$$\lg(a+b) - \lg(a-b) = \frac{1}{2}\lg 2,$$

если $a > b > 0$ и $a^2 + b^2 = 6ab$.

3. Доказать, что числа вида $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ при всех нечетных $n$ делятся на 512.

(1961)

**Вариант № 26**

1. В пространстве даны три параллельные прямые. Провести плоскость так, чтобы треугольник с вершинами в точках пересечения ее с данными прямыми имел минимальную площадь.

2. См. № 551.

3. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha.$$

(1962)

**Вариант № 27**

1. В прямоугольном параллелепипеде со сторонами $AB = 12$, $AC = 12$, $AE = 30$ точка $M$ лежит на грани $ABCD$, причем $MA = MB = \sqrt{37}$. Точка $N$, лежащая на противоположной грани, симметрична $M$ относительно точки пересечения диагоналей параллелепипеда.

Найти длину кратчайшего пути, проходящего по поверхности параллелепипеда и соединяющего точки $M$ и $N$.

2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$.

3. См. вариант № 18, задача № 3.

(1966)

**Вариант № 28**

1. В треугольной пирамиде $SABC$ $AS - BS = AC - BC$, $AS - CS = AB - BC$, $BS - CS = AB - AC$. Доказать, что в пространстве есть точка, равноудаленная от всех ребер пирамиды.

2. $u_1 = \frac{\pi}{2}$, $u_2 = \sin u_1 - u_1$, $u_3 = \sin u_2 - u_2$, . . ., $u_n = \sin u_{n-1} - u_{n-1}$. Чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, если известно, что этот предел существует?

3. См. вариант № 19, задача № 3.

(1966)

**Вариант № 29**

1. Основания прямой призмы — правильные шестиугольники такие, что радиус вписанной в них окружности равен 3; высота призмы — 23. Точка $A$ является серединой апофемы нижнего основания, а точка $B$, лежащая на верхнем основании, симметрична с $A$ относительно середины отрезка, соединяющего центры оснований.

Какова длина кратчайшего пути, соединяющего $A$ и $B$ и лежащего целиком на поверхности призмы.

2. Найти $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}} + \right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{(n-1)^2} + \sqrt[3]{n(n-1)} + \sqrt[3]{n^2}} \right).$$

3. См. вариант № 17, задача № 3.

(1966)

**Вариант № 30**

1. Основание четырехугольной пирамиды — равнобочная трапеция, средняя линия которой равна боковой стороне, а вершина проектируется на середину средней линии основания.

Доказать, что в этой пирамиде есть точка, равноудаленная от всех пяти граней.

2. $u_1 = \frac{\pi}{4}$, $u_2 = 1 - \cos u_1$, $u_3 = 1 - \cos u_2$, . . .,

$u_n = 1 - \cos u_{n-1}$.

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, если известно, что этот предел существует.

3. Доказать, что в многограннике число граней, являющихся многоугольниками с нечетным числом вершин, четно.

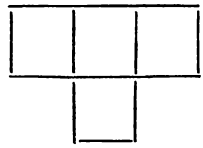
(1966)

## § 28. ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 6—11-х КЛАССОВ (III тур)

**Вариант № 31 (6-й класс)**

1. Три стрелка Анилов, Борисов, Воробьев сделали по 6 выстрелов по одной мишени и выбили поровну очков. Известно, что Анилов в первые три выстрела выбил 43 очка, а Борисов первым выстрелом выбил 3 очка. Сколько очков на каждый выстрел выбил каждый стрелок, если в 50 было 1 попадание, в 25 — 2, в 20 — 3, в 10 — 3, в 5 — 2, в 3 — 2, в 2 — 2, в 1 — 3?

2. Доказать, что шахматную доску 10×10 нельзя покрыть 25 фигурами вида



3. В клетках шахматной доски стоят натуральные числа так, что каждое равно среднему арифметическому своих соседей. Сумма чисел, стоящих в углах доски, равна 16. Найти число, стоящее на поле E2.

4. Имеется шахматная доска 100×100. Каково наименьшее число букв, которые можно поставить так, чтобы никакие две одинаковые буквы не стояли рядом (от одной нельзя перейти к другой ходом короля).

5. Отряд пионеров выстроен прямоугольником. В каждой шеренге берется самый высокий, из них выбирается самый низкий. В каждой колонке выбирается самый низкий и среди них выбирается самый высокий. Какой из этих пионеров выше?

6. Найти произведение трех чисел, сумма которых равна сумме их квадратов, равна сумме их кубов и равна 1.

(1964)

**Вариант № 32 (6-й класс)**

1. В переплетной мастерской было 92 листа белой бумаги и 135 листов цветной бумаги. На переплет каждой книги уходило по листу белой и листу цветной бумаги. После переплета нескольких книг белой бумаги осталось вдвое меньше, чем цветной. Сколько книг было переплетено?

2. Доказать, что если перемножить все целые числа от 1 до 1965, то получится число, последняя ненулевая цифра которого четная.

3. Передние покрышки автомобиля стираются через 25 000 *км* пути, а задние через 15 000 *км*. Когда нужно поменять покрышки местами, чтобы они стерлись одновременно?

4. Прямоугольник 19×65 *см* разбит прямыми, параллельными его сторонам, на квадратики со стороной 1 *см*. На сколько частей разобьется этот прямоугольник, если в нем провести еще диагональ?

5. Найти делимое, делитель и частное:

$$\begin{array}{l|l} xxxxxx & xxx \\ xxxx & \hline x8x \\ \hline \quad xxx & \\ \quad xxx & \\ \hline \quad xxxx & \\ \quad xxxx & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

6. Нечетные числа от 1 до 49 выписаны в виде таблицы:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 21 | 23 | 25 | 27 | 29 |
| 31 | 33 | 35 | 37 | 39 |
| 41 | 43 | 45 | 47 | 49 |

Выбираются 5 чисел, любые два из которых не стоят в одной строчке или в одном столбце.

Чему равна их сумма?

(1965)

**Вариант № 33 (6-й класс)**

1. Какое из чисел больше, $\underbrace{10\ldots01}_{1966\text{ нулей}}$ или $\underbrace{10\ldots01}_{1967\text{ нулей}}$?

2. В футбольном чемпионате участвуют 30 команд. Каждые 2 команды должны сыграть между собой один матч.

Доказать, что в любой момент найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

3. На доске выписаны все целые числа от единицы до 1966. Разрешается стереть два любых числа, записав вместо каждого из них разность. Доказать, что многократным повторением такой операции нельзя добиться, чтобы на доске остались только одни нули.

4. На белую плоскость брызнули черной краской. Доказать, что найдутся три точки одного цвета, лежащие на одной прямой, причем так, что одна из точек лежит посередине между двумя другими.

5. В шахматном турнире играют более трех шахматистов и каждый играет с каждым одинаковое число раз. За победу — одно очко, за ничью — $\frac{1}{2}$, за поражение — ноль. В турнире было 26 туров. После 13 тура один из участников обнаружил, что у него нечетное число очков, а у каждого из остальных участников четное число очков. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

(1966)

**Вариант № 34 (7-й класс)**

1. Дан выпуклый $n$-угольник; все его углы тупые. Доказать, что сумма диагоналей больше суммы сторон.

2. Найти целые значения для $x$ и $y$, чтобы $x^4 + 4y^4$ было простое число.

3. Дан треугольник $ABC$. На его сторонах строятся параллелограммы $ABKL$, $BCMN$ и $ACFG$. Доказать, что из отрезков $KN$, $MF$ и $GL$ можно составить треугольник.

4. См. вариант № 31, задача № 2.

5. Найти наибольшее число различных натуральных чисел, каждое из которых меньше 50 и каждые два из которых взаимно просты.

6. Дан треугольник $ABC$. $D$ и $E$ — середины сторон $AB$ и $BC$. Точка $M$ лежит на $AC$, $ME \geqslant EC$. Доказать, что $MD \leqslant AD$.

(1964)

**Вариант № 35 (7-й класс)**

1. Доказать, что целое положительное число, имеющее нечетное число делителей, является точным квадратом.

2. В треугольнике $ABC$ с площадью $S$ проведены медианы $AK$, $BE$, пересекающиеся в точке $O$. Найти площадь четырехугольника $CKOE$.

3. См. вариант № 32, задача № 3.

4. Прямоугольник $24\times60$ разбит прямыми, параллельными его сторонам, на единичные квадраты. На сколько частей разобьется этот прямоугольник, если в нем провести еще диагональ?

5. Пусть $[a]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее $a$. Решить уравнение:

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}.$$

6. На белую плоскость брызнули черной краской. Доказать, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1965 метрам.

(1965)

**Вариант № 36 (7-й класс)**

1. См. вариант № 33, задача № 3.

2. Доказать, что радиус окружности равен разности длин двух хорд, одна из которых стягивает дугу в $^1/_{10}$ окружности, а другая дугу в $^3/_{10}$ окружности.

3. Доказать, что при любом натуральном $n$ число

$$n\,(2n+1)\,(3n+1)\ldots(1966n+1)$$

делится на каждое простое число, меньшее 1966.

4. См. вариант № 33, задача № 4.

5. $n$ точек на плоскости расположены так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь меньше 1. Доказать, что все эти точки можно заключить в треугольник площади 4.

(1966)

**Вариант № 37 (8-й класс)**

1. Найти все простые числа $p$, $q$ и $r$ такие, что $pqr=5\,(p+q+r)$.

2. Доказать, что если $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}}=\dfrac{a}{c}$, то $\dfrac{\overbrace{abb\ldots b}^{n\text{ раз}}}{\underbrace{bb\ldots bc}_{n\text{ раз}}}=\dfrac{a}{c}$, где $\overline{ab}$ означает число $c$ цифрами $a$ и $b$.

3. Построить треугольник по периметру, высоте и углу при основании.

4. Доказать, что квадрат суммы $n$ различных квадратов целых чисел также является суммой $n$ квадратов, не равных нулю целых чисел.

5. В четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали $AC$ и $BD$. Доказать, что если окружности, вписанные в $\Delta ABC$ и $\Delta ADC$, касаются друг друга, то и окружности, вписанные в $\Delta BAD$ и $\Delta BCD$, также касаются.

6. Если числа $a$ и $n$ взаимно простые, то найдутся целые числа $x$ и $y$ такие, что $|x|<\sqrt{n}$, $|y|<\sqrt{n}$ и $ax-y$ делится на $n$. Доказать.

(1964)

**Вариант № 38 (8-й класс)**

1. Прямоугольник $24\times60$ разбит прямыми, параллельными его сторонам, на единичные квадраты. Провести еще одну прямую так, чтобы после этого прямоугольник оказался разбитым на наибольшее возможное число частей.

2. Через поле идет прямая дорога. Турист стоит на дороге в точке $A$. Он может идти по дороге со скоростью 6 *км/час* и по полю со скоростью 3 *км/час*. Найти геометрическое место точек, в которые турист может попасть за час ходьбы.

3. См. вариант № 35, задача № 5.

4. В некотором государстве каждые два города соединены дорогой. На каждой дороге разрешено движение только в одном направлении. Доказать, что найдется город, выехав из которого, можно объехать все государство, побывав в каждом городе только один раз.

5. Найти 8 простых чисел, сумма квадратов которых на 992 меньше, чем их учетверенное произведение.

(1965)

**Вариант № 39 (8-й класс)**

1. См. вариант № 36, задача № 4.
2. См. вариант № 36, задача № 3.
3. См. вариант № 36, задача № 6.

4. Доказать, что сумма всех делителей числа $n^2$ (включая 1 и $n^2$) нечетна.

5. В четырехугольнике три тупых угла. Доказать, что большая из двух его диагоналей выходит из вершины острого угла.

6. Числа $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ и т. д. строятся по следующему правилу:

$$x_1 = 2,\ x_2 = \frac{x_1^4+1}{5x_1},\qquad x_3 = \frac{x_2^4+1}{5x_2},\qquad x_4 = \frac{x_3^4+1}{5x_3},\ \ldots$$

Доказать, что сколько бы мы ни продолжали такое построение, все получающиеся числа будут не меньше $^1/_5$ и не больше 2.

(1966)

**Вариант № 40 (9-й класс)**

1. См. вариант № 37, задача № 3.

2. Внутри единичного квадрата расположена 51 точка. Доказать, что среди них найдутся три, умещающиеся в круге $R = \frac{1}{7}$.

3. Доказать, что если при натуральном $n$

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right]=2+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]+\cdots+$$

$$+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right],$$ где $[\alpha]$ — целая часть числа $\alpha$,

т. е. наибольшее целое число, не превосходящее $\alpha$, то число $n$ — простое.

4. Доказать, что квадрат суммы $n$ квадратов различных целых чисел, не равных нулю, есть сумма $n$ квадратов целых чисел, каждое из которых отлично от нуля.

5. В $\Delta ABC$ вершина $A$ соединена с точкой $D$, лежащей на $BC$.

а) доказать, что центры окружностей, описанных около треугольников $ABD$, $ADC$ и $ABC$ и точка $A$ лежат на одной окружности;

б) найти точку $D$, для которой радиус этой окружности минимален.

6. См. вариант № 37, задача № 6.

(1964)

**Вариант № 41 (9-й класс)**

1. Дан угол. Двумя отрезками длины 1 отсечь от него четырехугольник наибольшей площади.

2. Параллелограмм разбит прямыми, параллельными его сторонам, на несколько частей, причем одна его сторона разбита на $m$ частей, а другая — на $n$ частей. На какое наибольшее число частей можно разбить параллелограмм, если провести еще одну прямую?

3. Длины сторон треугольника $ABC$ удовлетворяют соотношению $AB \cdot BC \cdot CA < 60$.

На сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ выбираются соответственно точки $C'$, $A'$ и $B'$. Доказать, что

$$AC' \cdot C'B \cdot BA' \cdot A'C \cdot CB' \cdot B'A < AB \cdot BC \cdot CA.$$

4. Пусть $A_1, A_2, \ldots A_n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — две перестановки из чисел 1, 2, . . ., $n$. Доказать, что при четном $n$ какие-нибудь два из чисел $A_1 + B_1$, $A_2 + B_2$, . . ., $A_n + B_n$ дают при делении на $n$ одинаковый остаток.

5. $n$ кругов на плоскости занимают площадь 1. Доказать, что из них можно выбрать несколько непересекающихся кругов, сумма площадей которых больше 1/9.

(1965)

**Вариант № 42 (9-й класс)**

1. Вырезать из данного прямоугольника ромб наибольшей площади.

2. Сколько решений в целых числах имеет уравнение:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}.$$

3. Доказать, что можно раскрасить плоскость с помощью девяти красок таким образом, чтобы расстояние между любыми двумя точками одного цвета было отлично от 1966 *м*.

4. $p$ и $q$ простые числа, $q^3 - 1$ делится на $p$, $p - 1$ делится на $q$. Доказать, что $p = 1 + q + q^2$.

5. На сторонах треугольника $ABC$, как на гипотенузах, строятся во внешнюю сторону равнобедренные прямоугольные треугольники $ABD$, $BCE$, $ACF$. Доказать, что отрезки $DE$ и $BF$ равны и взаимно перпендикулярны.

6. Имеется $k$ красок. Сколькими способами можно раскрасить стороны данного правильного $n$-угольника так, чтобы соседние стороны были окрашены в разные цвета (многоугольник поворачивать нельзя).

(1966)

**Вариант № 43 (10—11-е классы)**

1. Внутри единичного квадрата расположен выпуклый $n$-угольник $P$. Доказать, что при любом $n$ найдутся три вершины $A$, $B$, $C$ $n$-угольника $P$ такие, что $S_{\Delta ABC} < \frac{100}{n^2}$.

2. На плоскости задана система координат. Пусть $N$ — число точек с целыми координатами $x$ и $y$, удовлетворяющими условию $x^2 + y^2 \leqslant n^2$, где $n$ — целое число. Доказать, что

$$N > 3(n-1)^2.$$

3. Дана окружность единичного радиуса и на ней четыре точки. Через каждые две соседние точки проведена окружность единичного радиуса. Доказать, что четыре точки пересечения последовательных окружностей лежат на одной окружности.

4. Пусть $\alpha_n$ показатель, с которым 2 входит в число $n$ (т. е. $n = 2^{\alpha_n} k$, где $k$ — нечетное). Обозначим через $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Доказать, что в последовательности $S_1, S_2, \ldots, S_{2^n-1}$ количество четных и нечетных чисел отличаются на единицу.

5. На плоскости даны две точки $A$ и $B$ и прямая $CK$. Найти на прямой $CK$ такую точку $E$, чтобы $AE + BE = d$, где $d$ — заданное число.

6. Пусть $S$ — набор натуральных чисел, меньших данного простого числа $P$, таких, что если в набор входят числа $a$ и $b$, то в него входят и остатки от деления чисел $ab$, $a^2$ и $b^2$ на $P$. Доказать, что если в наборе $S$ не менее двух чисел, то сумма всех чисел, входящих в $S$, делится на $P$.

(1964)

**Вариант № 44 (10—11-е классы)**

1. Решить в целых числах уравнение:

$$6xy - 4x + 9y - 366 = 0.$$

2. Найти сумму

$$\frac{1}{\cos\alpha \cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha \cos 3\alpha} + \ldots + \frac{1}{\cos(n-1)\alpha \cos n\alpha}.$$

3. См. вариант № 4, задача № 5.

4. На стороне $AB$ треугольника $ABC$ взята произвольная точка $M_1$. Из центра $A$ радиусом $AM_1$ проводится внутри $\triangle ABC$ дуга $M_1M_2$ до стороны $AC$ ($M_2$ на $AC$), затем из центра $C$ радиусом $CM_2$ проводится внутри $\triangle ABC$ дуга $M_2M_3$ до стороны $BC$ ($M_3$ на $BC$), из центра $B$ радиусом $BM_3$ дуга $M_3M_4$ до стороны $AB$, затем снова из центра $A$ радиусом $AM_4$ дуга $M_4M_5$ до стороны $AC$ и т. д. пока линия их дуг не замкнется. Найти длину полученной замкнутой дуги, если стороны треугольника $a$, $b$ и $c$, а радианная мера противолежащих углов $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$.

(10-й класс)

5. Доказать неравенство $(a+b)^n \leqslant 2^{n-1} \cdot (a^n + b^n)$, где $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$.

(11-й класс)

6. Дан куб $12 \times 12 \times 12$, который разрезан плоскостями, параллельными граням куба, на единичные кубики. На сколько частей разделится данный куб, если в нем провести сечение в виде правильного шестиугольника?

7. Даны три окружности. Найти на плоскости такую точку, чтобы правые касательные из нее к окружностям (глядя из точки) образовали одна с другой равные углы.

(1965)

**Вариант № 45 (10—11-е классы)**

1. См. вариант № 42, задача № 1.
2. См. вариант № 42, задача № 2.
3. Доказать, что можно так раскрасить плоскость с помощью 11 красок, чтобы расстояние между любыми двумя точками одного цвета было отлично от 1966 *м*.
4. См. вариант № 42, задача № 6.
5. Для каких $\varepsilon$ можно разбить отрезок длины $2a$ на $n$ отрезков, каждый из которых не больше $a$, причем так, чтобы из них нельзя было составить отрезка, длина которого отличается от $a$ меньше, чем на $\varepsilon$.
6. Найти все комплексные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n \\ x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = n. \end{cases}$$

(1966)

# ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

## Часть I

## АЛГЕБРА

### § 1. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ*

1. Однозначных чисел 9, число цифр 9, двухзначных чисел 90, число цифр $2 \cdot 90$; трехзначных чисел 900, число цифр $3 \cdot 900$; четырехзначных чисел 9000, число цифр $4 \cdot 9000$; следовательно, для нумерации страниц использованы все однозначные, двузначные, трехзначные и сколько-то четырехзначных чисел, т. е.:

$$1 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4x = 6869,$$

откуда $x = 995$.

**Ответ.** 1994 страницы.

2. Решение 1-е. На большом лугу косили все косцы полдня и половина косцов вторую половину дня, следовательно, за вторую часть дня они скосили $\frac{1}{3}$ большего луга. Если принять за единицу площадь большего луга, тогда площадь меньшего луга равна $\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что на меньшем лугу осталась нескошенной $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ часть луга, которую скосил один косец за день; это является средней производительностью каждого косца за один день. За один день косцы скосили $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ всей площади обоих лугов. Всех косцов было $\frac{4}{3} : \frac{1}{6} = 8$ (человек).

Решение 2-е. Обозначим число всех косцов $x$; тогда можно считать, что на первом большем лугу работало полдня $x + \frac{x}{2}$ косцов. Второй луг косили полдня $\frac{x}{2}$ косцов и целый день один косец или 2 косца полдня; отсюда (принимая за единицу производительность

---

* В этом параграфе некоторые задачи допускают как алгебраическое, так и арифметическое решение; они могут быть использованы при повторении курса арифметики.

каждого косца за полдня):

$$\frac{x}{2}+x=2\left(\frac{x}{2}+2\right).$$

**Ответ.** $x=8$ чел.

**3.** Обозначим $x$ количество лет сына в данный момент; имеем $2x-$ $-3(x-6)=x$; $x=9$.

**Ответ.** $x=9$.

**4.** Число лет гражданина равно сумме цифр четырехзначного числа, каждая из этих цифр не больше 9. Итак, гражданину не больше 36 лет, следовательно, он родился в XIX веке.

Если обозначить $x$ — число десятков, а $y$ — число единиц года рождения, то сумма цифр года рождения

$$1+8+x+y=87-(10x+y),$$

т. е. $11x+2y=78$.

Из последнего равенства вытекает, что $x=6$, поэтому $y=6$.

**Ответ.** 21 год.

**5.** Обозначим $N=1\cdot2\cdot3\ldots100$. Число нулей этого произведения равно числу множителей его, кратных десяти. Но $10=2\cdot5$, поэтому число нулей на конце данного произведения соответствует числу пар множителей 2 и 5. На 2 делятся все четные числа произведения $1\cdot2\ldots100$, на 5 делятся числа, оканчивающиеся цифрами 5 и 0; последних множителей меньше, поэтому достаточно определить их. Множителей, кратных 5, будет 20, кроме того, 4 множителя, кратных 25. Всего 24 пары множителей $2\cdot5$.

**Ответ.** Число оканчивается 24 нулями.

**6.** У к а з а н и е. Пусть искомое число имеет вид: $10^2\cdot x+10\cdot y+$ $+z$. Имеем: $10^2\cdot x+10\cdot y+z=11\cdot(x^2+y^2+z^2)$, при этом $x+$ $+y+z\leqslant27$. Из условия делимости на 11 находим: $x-y+z=0$ или $x-y+z=11$, так как $x-y+z\leqslant18$.

а) Если $x-y+z=0$, то $y=x+z$, следовательно,

$$x^2+z^2+(z-5)x-\frac{z}{2}=0.$$

Легко понять, что $z$ — число четное, поэтому оно может принимать одно из следующих значений: 0, 2, 4, 6, 8. При этих значениях $z$ находим из двух предыдущих равенств $x$ и $y$, а следовательно, и искомое число равное 550.

б) Аналогично находится второе число 803 при условии, что $x-$ $-y+z=11$.

**Ответ.** 550 и 803.

7. В заданном числе 192 цифры, из которых вычеркиваем сто. Первые пять девяток слева в числе остаются (в числах 9, 19, 29, 39 и 49); при этом вычеркнуто $8 + 4 \times 19 = 84$ цифры. Следующая цифра в числе не может быть девяткой, так как тогда пришлось бы вычеркнуть еще 19 цифр, т. е. всего $19 + 84 = 103$ цифры. Поэтому вычеркивается 15 цифр до семерки в числе 57 и цифра 5 в числе 58. Всего вычеркнуто $84 + 15 + 1 = 100$ цифр. Оставшиеся цифры изображают искомое число.

**Ответ.** 999997859606162. . .100.

8. Пусть $x$ и $y$ целые числа, их разность $d$, остаток $r$:

$$x - y = d;\ x = y + d.$$

При делении первого числа на разность получим: $x = kd + r$, где $k$ — частное. Следовательно, $kd + r = y + d$, откуда второе число $y = (k - 1)\,d + r$. Итак, при делении целых чисел $x$ и $y$ на их разность $d$ получаются равные остатки $r$, а их частные отличаются на единицу.

9. Обозначим первое число $8x$, второе $(x^2 - 1)$; произведение этих чисел $8x\,(x^2 - 1) = 8x^3 - 8x$, сложенное с первым из них, дает куб некоторого числа, равного $8x^3 = (2x)^3$. Если к этому произведению прибавить второе число, то получим $8x^3 - 8x + x^2 - 1$, которое должно равняться кубу некоторого числа. Обозначая это число $2x - 1$, находим уравнение:

$$(2x - 1)^3 = 8x^3 - 8x + x^2 - 1,$$

откуда $x = \frac{14}{13}$.

Обозначения искомых чисел выбраны так, чтобы получить простейшие уравнения для решения данной задачи.

**Ответ.** $8x = \frac{112}{13}$, $x^2 - 1 = \frac{27}{169}$.

10. Наименьшее число, записанное с помощью единиц, кратное 3, есть 111, т. е. имеет 3 единицы; наименьшее число, кратное 33, есть 111 111, т. е. $3 \cdot 2 = 6$ единиц. Наименьшее число, кратное $\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ цифр}}$, есть число $\underbrace{111\,111\ldots111}_{3n}$, т. е. число, записанное $3n$ единицами, где $n$ — число цифр делителя (для данной задачи $n = 100$).

11. Допустим, что искомые числа больше заданных на $x$ и они будут: $a + x$, $b + x$ и $c + x$. По условию эти числа образуют непрерывную пропорцию, т. е.

$$\frac{a + x}{b + x} = \frac{b + x}{c + x},$$

откуда

$$x = \frac{b^2 - ac}{a + c - 2b}.$$

Значения $x \geqslant 0$, если

$$b^2 - ac > 0 \text{ и } a + c > 2b \tag{1}$$

или если

$$b^2 - ac < 0 \text{ и } a + c < 2b. \tag{2}$$

Из неравенств (1) находим, что

$$\frac{a+c}{2} > b > \sqrt{ac}. \tag{3}$$

Из неравенств (2) получим неравенства

$$\frac{a+c}{2} < b < \sqrt{ac}, \tag{4}$$

не имеющие смысла.

Итак, задача имеет решение, если выполняются неравенства (1).

12. Обозначим сумму всех трех чисел ($a$, $b$ и $c$):

$$a + b + c = (1 + x)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Если сумма двух первых чисел $a + b = x^2$, то третье число $c = 2x + 1$. Если сумма второго и третьего $b + c = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, то число $a = 4x$, поэтому $b = x^2 - 4x$. По условию сумма первого и третьего чисел, т. е. $a + c = 6x + 1$ должна быть квадратом. Полагая, например, $6x + 1 = 121$, находим: $x = 20$.

**Ответ.** $a = 80$, $b = 320$, $c = 41$.

Легко найти и другие решения, например: $a = 112$, $b = 672$, $c = 57$.

**14.** Указание. Обозначая искомые числа соответственно $x$ и $y$, имеем:

$$\frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{1} = \frac{xy}{18}.$$

**Ответ.** 9 и 6.

**15.** Указание. Имеем: $x^2 - y^2 = 133$.

$$(x + y)(x - y) = 19 \cdot 7 = 133 \cdot 1,$$

или

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ x - y = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 133 \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Решая эти системы уравнений, находим две пары чисел.

**Ответ.** 13 и 6; 67 и 66.

**16.** Указание. Если обозначить $x$ — число единиц, $y$ — число десятков искомого числа, то

$$\begin{cases} 10y + x = 3(x + y) \\ (x + y)^2 = 3(10y + x). \end{cases}$$

**Ответ.** 27.

**17.** Составим геометрическую пропорцию:

$$t : x = y : z.$$

Тогда, согласно условию,

$$t + z = 2S,$$
$$x + y = 2S_1,$$
$$t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 4c^2,$$
$$xy = tz.$$

Обозначая $xy = tz = q$, после очевидных преобразований находим: $q = S^2 + S_1^2 - c^2$, что дает возможность найти все члены пропорции.

**Ответ.**

$$t = S + \sqrt{c^2 - S_1^2},$$
$$z = S - \sqrt{c^2 - S_1^2},$$
$$x = S_1 + \sqrt{c^2 - S^2},$$
$$y = S_1 - \sqrt{c^2 - S^2}.$$

**18.** Обозначим числа $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$, . . ., $a_{4n}$ и докажем, что они принимают не более четырех различных значений.

Допустим, что среди этих $4n$ чисел будет больше четырех чисел, различных между собой, например:

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_k \ (k = 5, 6, 7, \ldots, 4n).$$

По условию из четырех любых чисел, попарно различных, можно составить геометрическую пропорцию:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4};\ a_1a_4 = a_2a_3, \tag{1}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_4}{a_3};\ a_1a_3 = a_2a_4, \tag{2}$$

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{a_4}{a_2};\ a_1a_2 = a_3a_4. \tag{3}$$

Из трех пропорций имеет место только первая; вторая и третья невозможны, так как

$$a_1 < a_2 \text{ и } a_3 < a_4,$$
$$a_1 < a_3 \text{ и } a_2 < a_4.$$

Составляя пропорцию

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_k}$$

и сравнивая ее с (1), находим: $a_4 = a_k$, что противоречит допущению. Отсюда заключаем, что каждое из $4n$ чисел будет принимать одно из четырех возможных значений, поэтому среди этих чисел встретится $n$ одинаковых.

19. В сутки часовая стрелка делает 2 оборота, а минутная — 24. Отсюда минутная стрелка обгоняет часовую 22 раза и каждый раз с часовой стрелкой образует по два прямых угла.

**Ответ.** 44 раза.

20. Допустим, что стрелки часов движутся равномерно. Пусть до встречи стрелок часовая стрелка прошла $x$ минутных делений циферблата; минутная стрелка за это время пройдет $45 + x$ делений. Так как минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой, то $12x = 45 + x$, откуда $x = 4\frac{1}{11}$ минутных делений.

**Ответ.** Через $49\frac{1}{11}$ мин.

21. Промежуток времени, за который собака пробегает 4 *м* (2 скачка) лисица пробежит только 3 *м* (3 скачка), следовательно, расстояние между ними сокращается на 1 *м*. Начальное расстояние между собакой и лисицей равно 30 *м*, поэтому собака догонит лисицу на расстоянии 120 *м* от точки $A$.

**Ответ.** 120 *м*.

22. Указание. Обозначим номинальную цену книги $x$ руб. Магазин должен уплатить издательству $0{,}9x$ руб. Наценка в процентах составит:

$$\frac{x - 0{,}9x}{0{,}9x} \cdot 100 = \frac{100}{9}.$$

**Ответ.** 11,11%.

23. Указание. $\frac{480}{x} = \frac{480}{x + 16} + 5$, где $x$ — число страниц, прочитанных в день.

**Ответ.** 15 дней.

24. Обозначим длину пути $x$ километров. Время, за которое колхозник пройдет этот путь со скоростью 3 *км/час*, равно $\frac{x}{3}$ часа. Часть пути, оставшаяся через час после выхода из села, равна $(x - 3)$ *км*. С новой скоростью колхозник пройдет этот путь за $\frac{x-3}{4}$ час. Если колхозник будет идти с первой скоростью, то опоздает на 40 мин., т. е. до отхода поезда останется $\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right)$ часа.

Через час после выхода время, которое останется до отхода поезда, равно $\left(\frac{x}{3} - \frac{5}{3}\right)$ часа. Учитывая, что с новой скоростью колхозник

придет раньше на 45 мин., находим уравнение:

$$\frac{x}{3}-\frac{5}{3}-\frac{x-3}{4}=\frac{3}{4}.$$

**Ответ.** 20 *км*.

25. У к а з а н и е. Положительный корень заданного уравнения равен 5. Обозначая скорость лодки в стоячей воде $x$ *км/час*, скорость лодки по течению $(x+2{,}4)$ *км/час*, имеем:

$$\frac{5}{x-2{,}4}+\frac{5}{x+2{,}4}=\frac{4000}{3600},$$

откуда $x_1=9{,}6$ $(x_2<0)$.

**Ответ.** $x=9{,}6$ *км/час*.

26. У к а з а н и е. Допустим, что обе трубы заполняют бассейн за $x$ часов. Тогда:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+4{,}5}=\frac{1}{x},$$

откуда $x=3$.

**Ответ.** I труба за 5 час., II — за 7,5 часа.

27. Пусть скорость товарного поезда равна $x$ *км/час*, а скорость пассажирского поезда равна $(x+5)$ *км/час*. За 15 час. пассажирский поезд пройдет $(x+5)\cdot 15$ *км*. Товарный поезд находится в пути 16,5 часа и пройдет путь $x\cdot 16{,}5$ *км*.

Учитывая условие задачи, составим уравнение:

$$(x+5)\cdot 15=x\cdot 16{,}5+21, \text{ откуда } x=36.$$

**Ответ.** $x=36$ *км/час*.

28. Из того что оба туриста P и M из пункта A отправились одновременно и прибыли в пункт B тоже одновременно, можно сделать заключение, что расстояние, пройденное первым туристом пешком в начале пути, а вторым туристом — в конце пути, одно и то же; обозначим его $x$.

Время, за которое турист M прошел $x$ *км* со скоростью $v_1$ *км/час*, соответствует времени, за которое мотоциклист N со скоростью $v_2$ *км/час* проехал путь, равный $(2s-3x)$ *км* [$(s-2x)$ *км* до встречи с туристом P и $(s-x)$ *км* после встречи]. Отсюда

$$\frac{x}{v_1}=\frac{2s-3x}{v_2},\quad x=\frac{2sv_1}{v_2+3v_1}. \tag{1}$$

Каждый из туристов прошел пешком $x$ *км* и проехал на мотоцикле $(s-x)$ *км*; отсюда искомое время, затраченное туристами на преодоление всего пути,

$$t=\frac{x}{v_1}+\frac{s-x}{v_2}. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2), исключая $x$, находим значение $t$.

**Ответ.** $t = \dfrac{s(3v_2 + v_1)}{v_2(3v_1 + v_2)}$.

**29.** Указание. Обозначив $x$ и $y$ число часов, затраченных для выполнения всей работы соответственно первым и вторым рабочим, составить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{13}{6}xy \\ x + y = \dfrac{5}{18}xy. \end{cases}$$

**Ответ.** $x_1 = 6$, $y_1 = 9$; $x_2 = 9$, $y_2 = 6$.

**30.** Обозначим через $x$ и $y$ соответственно число частей первого и второго сплавов, содержащихся в новом сплаве. Следовательно, в новом сплаве будет содержаться $\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{5}y$ первого металла и $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{5}y$ второго металла.

Поэтому

$$\frac{\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y}{17} = \frac{\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y}{27},$$

откуда

$$\frac{5x + 6y}{10x + 9y} = \frac{17}{27}, \quad \frac{x}{y} = \frac{9}{35}.$$

Итак, в новом сплаве содержится 9 частей первого и 35 частей второго сплава.

**Ответ.** $x : y = 9 : 35$.

**31.** Обозначим через $x$ и $(x - 2)$ время работы в часах первого и второго двигателя. По условию

$$\frac{600}{x}(x - 2) = \frac{384}{x - 2}x,$$

т. е. $9x^2 - 100x + 100 = 0$; откуда $x_1 = 10$.

Следовательно, $\dfrac{600}{10} = 60$; $\dfrac{384}{8} = 48$.

**Ответ.** 60 *г* и 48 *г*.

**32.** Пусть на стороне квадрата укладывается $x$ шаров, а на стороне треугольника $(x + 2)$ шара. Число всех шаров в первом случае равно $x^2$, во втором

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (x + 2) = \frac{(3 + x)(x + 2)}{2}.$$

Следовательно, $x^2 = \frac{(x+3)(x+2)}{2}$, или $x^2 - 5x - 6 = 0$, откуда $x = 6$.

**Ответ.** 36 шаров.

**33.** $$\begin{cases} x = \dfrac{s\left(t - 2 + \sqrt{t^2+4}\right)}{2t} \\ y = \dfrac{s\left(t + 2 - \sqrt{t^2+4}\right)}{2t}. \end{cases}$$

**34. Ответ.** Задача имеет определенное решение только при $v = 5$ *км* в час; $x = 4$ *км*.

**35.** Указание. Обозначая скорости автобусов через $x$ и $(x - 2)$ соответственно, составить уравнение:

$$\frac{36}{x} + \frac{1}{4} = \frac{36}{x-2}.$$

**Ответ.** $x_1 = 18$ *км/час*, $x_2 = 16$ *км/час*.

**36.** Указание. Обозначить: $P$ — общий вес сплава, $p$ — вес «благородного металла», $t$ — проба. По известной формуле $t = \frac{p}{P}$. Пусть взято $x$ килограммов первого сплава и $y$ килограммов второго; применяя приведенную выше формулу, имеем:

$$\begin{cases} x \cdot 0{,}950 + y \cdot 0{,}800 + 2 = 25 \cdot 0{,}906 \\ x + y + 2 = 25. \end{cases}$$

**Ответ.** $x = 15$ *кг*; $y = 8$ *кг*.

**37.** Пусть сплав меди содержит $x$ килограммов серебра и $y$ килограммов меди. Сплавив его с 3 *кг* чистого серебра, получим:

$$\frac{x+3}{x+y+3} = 0{,}900. \qquad (1)$$

Сплавив его с 2 *кг* сплава 900-й пробы, получим чистого серебра $(2 \cdot 0{,}900 + x)$; общий вес $(x + y + 2)$, поэтому имеем:

$$\frac{x+1{,}8}{x+y+2} = 0{,}840. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), находим: $x = 2{,}4$ *кг*; $y = 0{,}6$ *кг*. Отсюда вес сплава $x + y = 3$ *кг*, проба его равна $\frac{2{,}4}{3} = 0{,}8$.

**Ответ.** 3 *кг*; 0,8.

38. Обозначим через $x$ деньги, положенные на сберегательную книжку в кассу, через $t$ — время, выраженное в годах. Тогда доход за один год будет равен $0{,}02x$, а через $t$ лет — $0{,}02x \cdot t$.

Доход по 3% за $(t-1)$ лет будет равен $0{,}03x\,(t-1)$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 0{,}02x \cdot t = 8502 \\ 0{,}03x\,(t-1) = 819. \end{cases}$$

Упрощая ее, получим:

$$\frac{1 + 0{,}02t}{t-1} = \frac{1417}{4550},$$

откуда $t = 4{,}5$, т. е. 4 года 6 мес.

Подставляя значение $t$ в одно из уравнений, находим $x = 7800$.

**Ответ.** 7800 руб.; 4 года 6 мес.

39. Допустим, что первый каменщик выполнит всю работу за $x$ дней; тогда второй — за $(x-3)$ дня. Принимая работу за 1 (единицу), находим, что первый каменщик в день сделает $\frac{1}{x}$, а второй $\frac{1}{x-3}$ часть работы. Первый каменщик сделает $\frac{7}{x}$, а второй $\frac{5{,}5}{x-3}$ часть работы; отсюда составляем уравнение:

$$\frac{7}{x} + \frac{5{,}5}{x-3} = 1,$$

или

$$x^2 - 15{,}5x + 21 = 0.$$

**Ответ.** 14 и 11 дней.

40. Допустим, что второй пешеход проходит все расстояние за $x$ часов; тогда первый проходит его за $(x + 2{,}5)$ часа. Принимая весь путь за единицу, находим, что первый пешеход проходит за час $\frac{1}{x+2{,}5}$ часть пути, второй $\frac{1}{x}$. Известно, что, двигаясь друг другу навстречу, они прошли весь путь за 3 часа; отсюда составляем уравнение:

$$\left(\frac{1}{x+2{,}5} + \frac{1}{x}\right) \cdot 3 = 1,$$

или

$$2x^2 - 7x - 15 = 0.$$

Решая это уравнение, получим: $x_1 = 5$ ($x_2 < 0$).*

* Здесь и далее в скобки взяты корни уравнения, не удовлетворяющие условию задачи.

**Ответ.** 7,5 часа и 5 час.

**41.** Указание. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+k}\right)t=1,$$

где $x$ — время движения второго пешехода.

**42.** Допустим, что на каждую голову скота предполагалось израсходовать $x$ тонн кормов; увеличенная норма составит $(x+c)$ тонн. Следовательно, скота в колхозе первоначально было $\frac{a}{x}$ голов, осталось $\frac{a}{x+c}$ голов; составляем уравнение:

$$\frac{a}{x}-\frac{a}{x+c}=b$$

или

$$bx^2+bcx-ac=0.$$

**Ответ.** $x_1=\dfrac{-bc+\sqrt{b^2c^2+4abc}}{2b}$ $(x_2<0)$.

**43.** Указание.

$$\frac{a}{x-b}-\frac{a}{x}=c,$$

где $x$ — количество рабочих, участвовавших в выгрузке зерна.

**Ответ.** $x_1=\dfrac{bc+\sqrt{b^2c^2+4abc}}{2c}$ $(x_2<0)$.

**44.** Обозначим через $x$ время, за которое проходит расстояние $s$ курьерский поезд. Тогда время, за которое проходит это же расстояние пассажирский поезд, будет равно $x+t$.

Разность скоростей пассажирского и курьерского поездов равна $a$, поэтому

$$\frac{s}{x}-\frac{s}{x+t}=a,$$

или

$$ax^2+atx-st=0.$$

**Ответ.** $x_1=\dfrac{-at+\sqrt{a^2t^2+4ast}}{2a}$ $(x_2<0)$.

**45.** Обозначим скорость поезда через $v$ *км/час*. Увеличенная его скорость равна $(v+a)$ *км/час*. При первоначальной скорости время, потраченное на перегон $b$ километров, равно $\frac{b}{v}$ часов, при увеличенной

скорости на этот же путь потребовалось время, равное $\frac{b}{v+a}$ часов, меньшее на $t$ минут, поэтому

$$\frac{b}{v}-\frac{b}{v+a}=\frac{t}{60}.$$

Решая это уравнение, находим ответ:

$$v_1=\frac{-at+\sqrt{a^2t^2+240nbt}}{2t}\ (v_2<0).$$

**46.** Обозначим скорость автомашины на грунтовой дороге $x$ *км/час*; тогда скорость автомашины на шоссе равна $(x+v)$ *км/час*. Время, за которое автомашина пройдет асфальтированное шоссе, равно $\frac{2}{3}\cdot\frac{s}{x+v}$; время, за которое автомашина пройдет грунтовую дорогу, равно $\frac{1}{3}\cdot\frac{s}{x}$. По этим данным составляем уравнение:

$$\frac{2s}{3(x+v)}+\frac{s}{3x}=t.$$

Воспользовавшись формулой $s=vt$, после преобразования получим уравнение:

$$x^2=\frac{v^2}{3},$$

откуда

$$x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}v\ (x_2<0).$$

**Ответ.** $x=\frac{\sqrt{3}}{3}v,\quad x+v=\frac{(\sqrt{3}+3)v}{3}.$

**47.** Обозначим скорость вестового $x$ *км/час*. Относительная скорость вестового при движении его из конца колонны в начало равна $(x-v)$ *км/час*, при движении обратно $(x+v)$ *км/час*. Время движения вестового вперед равно $\frac{d}{x-v}$ часов; время движения назад $\frac{d}{x+v}$ часов, что в сумме равно $\frac{t}{60}$ часов. Составляем уравнение:

$$\frac{d}{x-v}+\frac{d}{x+v}=\frac{t}{60},$$

или

$$tx^2-120dx-tv^2=0.$$

**Ответ.** $x_1=\frac{60d+\sqrt{3600d^2+t^2v^2}}{t}\ (x_2<0).$

**48.** 50 *км/час*.

**49.** $x_1 = \dfrac{d - bt + \sqrt{(d+bt)^2 + 4abt}}{2t}$ $(x_2 < 0)$.

Скорость мотоциклиста на $b$ километров больше.

**50.** Здесь удобно обозначить первую сумму через $1000x$, а вторую через $1000y$; тогда

$$1000x + 1000y = 10\,000,$$

т. е.

$$x + y = 10. \qquad (1)$$

Процентная такса с первой суммы равна $\dfrac{1000x}{1000} = x$, а годовой доход с этой суммы равен $1000x \cdot \dfrac{x}{100} = 10x^2$. Аналогично находим, что годовой доход со второй суммы равен $10y^2$.

По условию задачи

$$10x^2 + 10y^2 = 580$$

или

$$x^2 + y^2 = 58. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), находим ответ: 7000 руб. и 3000 руб.

**51.** Обозначим через $x$ килограммов вес первого раствора; тогда вес второго будет равен $(10 - x)$ килограммов.

По условию

$$\frac{0{,}8 \cdot 100}{x} - \frac{0{,}6 \cdot 100}{10 - x} = 10,$$

откуда $x_1 = 4$ $(x_2 = 20)$.

**Ответ.** 4 *кг* и 6 *кг*.

**52.** Если принять за единицу продукцию завода за год, предшествовавший первому, то продукция первого года будет равна

$$1 + \frac{a}{100}.$$

Продукция второго года составит:

$$1 + \frac{a}{100} + \left(1 + \frac{a}{100}\right)\frac{b}{100} = \left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right).$$

За третий год продукция увеличится на

$$\left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right) \cdot \frac{x}{100},$$

где $x$ — процент прироста продукции за третий год.

Следовательно, согласно условию, средний годовой прирост продукции за три года составит:

$$\frac{1}{3}\left[\frac{a}{100} + \left(1 + \frac{a}{100}\right) \cdot \frac{b}{100} + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right) \cdot \frac{x}{100}\right] = \frac{c}{100}.$$

**Ответ.** $\dfrac{3c - a - b - \dfrac{ab}{100}}{\left(1 + \dfrac{a}{100}\right)\left(1 + \dfrac{b}{100}\right)}\ \%$.

53. Первый раз мяч поднимается на $8{,}1 \cdot \dfrac{2}{3}$;

второй раз мяч поднимается на $8{,}1 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$;

. . . . . .

$n$-й раз мяч поднимается на $8{,}1 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

По условию

$$8{,}1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1{,}6,$$

или

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^4.$$

**Ответ.** $n = 4$.

54. Обозначим через $N$ количество населения в данный момент. Количество населения к концу первого года составляет

$$N + \frac{N}{80} = N\left(1 + \frac{1}{80}\right);$$

количество населения к концу второго года составляет

$$N\left(1 + \frac{1}{80}\right)\left(1 + \frac{1}{80}\right) = N\left(1 + \frac{1}{80}\right)^2;$$

. . . . . .

количество населения к концу $n$-го года составит

$$N\left(1 + \frac{1}{80}\right)^n.$$

По условию $N\left(1 + \dfrac{1}{80}\right)^n = 2N$.

**Ответ.** $n = \dfrac{\lg 2}{\lg 81 - \lg 80} \approx 56$ (лет).

55. $x = 49$, $y = 1$.

**56.** Обозначим число стульев в каждом ряду через $x$, а число рядов через $y$. По условию задачи составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = n \\ (x + p)(y - m) = n. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим два решения:

$$1)\ x_1 > 0,\ y_1 > 0;\ 2)\ x_2 < 0,\ y_2 < 0.$$

Второе решение, соответствующее отрицательным значениям корней, условию задачи не удовлетворяет.

**57.** Обозначим скорость трамвая $x$ *км/час*, скорость пешехода 5 *км/час*. Относительная скорость встречного трамвая будет $(x+5)$ *км/час*, а относительная скорость попутного трамвая $(x - 5)$ *км/час*.

Принимая число трамваев, проходящих в течение определенного промежутка времени на небольшом участке пути, пропорциональным их скорости, находим:

$$\frac{x+5}{x-5} = \frac{120}{45},$$

откуда искомая скорость трамвая $x = 11$ *км* в час.

**Ответ.** 11 *км/час*.

**58.** Обозначим: $z$ — радиус основания цилиндра, $v$ — объем воды в цилиндре. Тогда, по условию задачи, имеем:

$$v = \pi z^2 \cdot 2R - \frac{4}{3}\pi R^3,\ v = \pi z^2 \cdot 2mR - \frac{4}{3}\pi m^3 R^3;$$

сравнивая и делая преобразование, получим:

$$2\pi z^2 R(m-1) = \frac{4}{3}\pi R^3 (m^3 - 1),$$

т. е.

$$z^2 = \frac{2}{3} R^2 (m^2 + m + 1),$$

откуда

$$z = R\sqrt{\frac{2(m^2+m+1)}{3}}.$$

Задача возможна, если $z > R > 0$.

Пусть $m > 1$, тогда выполняется неравенство:

$$R\sqrt{\frac{2(m^2+m+1)}{3}} > mR$$

или $m^2 - 2m - 2 < 0$, $(m-1)^2 - 3 < 0$,

т. е. $(m - 1 + \sqrt{3})(m - 1 - \sqrt{3}) < 0$.

Замечая, что первый множитель положительный, находим:

$$m < 1 + \sqrt{3}.$$

Следовательно, задача имеет решение, если

$$1 < m < 1 + \sqrt{3}.$$

59. Допустим, что это произойдет через $t$ лет. По срочным вкладам, внесенным на срок не менее 6 мес., сберегательная касса выплачивает 3%, следовательно, каждый внесенный рубль через год обратится в 1,03 руб., а каждая тысяча рублей — в $1000 \cdot 1{,}03$ руб. Через $t$ лет каждая тысяча рублей обратилась бы в $1000 \cdot 1{,}03^t$ руб. За $t$ лет вкладчик заберет сумму денег, равную

$$90 \cdot 1{,}03 + 90 \cdot 1{,}03^2 + 90 \cdot 1{,}03^3 + \ldots + 90 \cdot 1{,}03^{t+1} + \\ + 90 \cdot 1{,}03^t = \frac{90 \cdot 1{,}03\,(1{,}03^t - 1)}{0{,}03}.$$

Так как через $t$ лет вклад с процентами будет полностью взят, имеем равенство:

$$1000 \cdot 1{,}03^t = \frac{90 \cdot 1{,}03\,(1{,}03^t - 1)}{0{,}03},$$

$$\text{или } 1{,}03^t = \frac{309}{209}, \quad t = \frac{1699}{128}.$$

**Ответ.** 13,3 года.

60. 10 *л*.

61. I в 27 час., II в 24 часа.

62. 8 *кг* и 12 *кг*.

63. 9,57.

64. 15 *км* и 7 *км*.

65. 35 строк, 38 букв.

66. 3 руб.; $n = 2$.

67. Указание. Имеем: $x + y = x \cdot y = (x + y) \cdot (x - y)$, откуда $x - y = 1$, $y = x - 1$.

**Ответ.** $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

68. $\frac{a \pm \sqrt{c^2 - b^2}}{2}$.

69. $t \approx 4{,}7$ года.

70. $\sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{np}{t}} - \frac{p}{2}$ и $\sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{np}{t}} + \frac{p}{2}$.

71. Скорость поезда 44 *км/час*, парохода 14 *км/час*.

73. I — 15 деталей, II — 20 деталей.

74. I за 3 часа, II за 6 час., III за 2 часа.

76. 35 *см*.

77. 60 *км/час* и 80 *км/час*.

## § 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

**78.** Раскрывая скобки, находим:

$P = a^2b + 2abc + a^2c + ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 = a^2(b + c) + ab(b + c) + ac(b + c) + bc(b + c) = (b + c)(a^2 + ab + ac + bc) = (b + c)[a(a + b) + c(a + b)] = (b + c)(a + b)(a + c).$

**Ответ.** $P = (a + b)(a + c)(b + c).$

**79.** $P = (a + b)^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b)c^2 + c^3 - (a^3 + b^3) - c^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3ac + 3bc + 3c^2 - a^2 - ab - b^2) = (a + b)(3ab + 3ac + 3bc + 3c^2) = 3(a + b)[a(b + c) + c(b + c)] = 3(a + b)(b + c)(a + c).$

**Ответ.** $P = 3(a + b)(a + c)(b + c).$

**80.** $P = x^3 + 6x^2 - x^2 + 9x - 6x - 9 = (x - 1)\cdot(x^2 + 6x + 9).$

**Ответ.** $P = (x - 1)(x + 3)^2.$

**81.** Указание. Выделить и разложить двучлен:

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

**Ответ.** $P = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 2).$

**82.** $P = x(x^4 + x^2 + 1) + (x^4 + x^2 + 1) = (x + 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x + 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) = (x + 1)[(x^2 + 1)^2 - x^2] = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$

**Ответ.** $P = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$

**83.** $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2 = (a + b)^3 + c^3 - 3ab(c + a + b) = (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$

**84.** $ay^3 - xy^3 - ax^3 + x^3y + a^3(x - y) = xy(x^2 - y^2) - a(x^3 - y^3) + a^3(x - y) = \cdots = (x - y)[x^2(y - a) + xy(y - a) - a(y^2 - a^2)] = (x - y)(y - a)(x^2 + xy - ay - a^2) = \cdots = (x - y)(x - a)(y - a)(a + x + y).$

85. Указание.

$$\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2 - x^n = \frac{(1-x^n)(1-x^{n+2})}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{(1-x^n)}{1-x} \cdot \frac{(1-x^{n+2})}{1-x}.$$

**Ответ.** $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})(1 + x + \cdots + x^{n+1})$.

86. Указание. Второй множитель равен частному от деления заданного выражения на известный множитель.

**Ответ.** $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

87. Указание.

$P = (x^{10} + x^9 + x^8) - (x^9 + x^8 + x^7) + (x^7 + x^6 + x^5) - (x^6 + x^5 + x^4) + (x^5 + x^4 + x^3) - (x^3 + x^2 + x) + (x^2 + x + 1)$.

**Ответ.** $P = (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

88. $P = (\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2})\sqrt[3]{a^2b^2} + (\sqrt[3]{a^4} - \sqrt[3]{b^4})\sqrt[3]{c^2} + (\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2})\sqrt[3]{c^4} = (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2})\left[(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})\sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{a^2b^2} - \sqrt[3]{c^4}\right] = (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2})\left[(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{c^2})\sqrt[3]{c^2} - (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{c^2}) \times \sqrt[3]{b^2}\right] = (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{c^2})(\sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{b^2})$.

$$P = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{c}) \times (\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{b}).$$

89. $P = \frac{1}{a+c}$.

90. $P = \frac{a-x}{a^3x^3}$.

91. $P = \frac{3(x-2)}{2(x+3)}$.

92. $P = 3$.

**93.** Указание. $P = \dfrac{\sqrt{xy}\,[1 - xy\,(x^3 + y^6)]}{1 + \sqrt{xy\,(x^3 + y^6)}} =$

$$= \frac{\sqrt{xy}\,[1 + \sqrt{xy\,(x^3 + y^6)}]\,[1 - \sqrt{xy\,(x^3 + y^6)}]}{1 + \sqrt{xy\,(x^3 + y^6)}} =$$

$$= \sqrt{xy}\,[1 - \sqrt{xy\,(x^3 + y^6)}].$$

**Ответ.** $P = \sqrt{xy} - xy\sqrt{x^3 + y^6}$.

**94.** $P = \left[\dfrac{\sqrt[4]{ax}\,(\sqrt{x} - \sqrt{a})}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} + \dfrac{1 + \sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right]^{-2} \times$

$$\times \sqrt{\left(1 + \sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\left(1 + \sqrt{\frac{a}{x}}\right) =$$

$$= \sqrt{ax}\left(1 + \sqrt{\frac{a}{x}}\right) = \sqrt{a}\,(\sqrt{x} + \sqrt{a}).$$

**Ответ.** $P = a + \sqrt{ax}$.

**95.** $P = \dfrac{\sqrt{1 + a}}{\sqrt{1 + a} - \sqrt{1 - a}} + \dfrac{\sqrt{1 - a}}{\sqrt{1 + a} - \sqrt{1 - a}} \times$

$$\times \frac{\sqrt{1 - a^2} - 1}{a} = \frac{\sqrt{1 + a} + \sqrt{1 - a}}{\sqrt{1 + a} - \sqrt{1 - a}} \cdot \frac{\sqrt{1 - a^2} - 1}{a} =$$

$$= \frac{2a}{(\sqrt{1 + a} - \sqrt{1 - a})^2} \cdot \frac{\sqrt{1 - a^2} - 1}{a} = -1.$$

**Ответ.** $P = -1$.

**96.** Указание. Обозначить

$$(a + b)^{-\frac{1}{2}} = u,\ (a - b)^{-\frac{1}{2}} = v.$$

**Ответ.** $P = -\sqrt{\dfrac{a - b}{a + b}}$.

**97.** 1.

**98.** $P = \sqrt{2}$.

**99.** $P = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.

100. $P=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{(n^2+1)^3}{n^2}}+2\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{(n^4-1)^3}}{n^2}}+\sqrt[3]{\dfrac{(n^2-1)^3}{n^2}}}=$

$$=\cdots=\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2(n^2+\sqrt{n^4-1})}=\frac{(n^2-\sqrt{n^4-1})\sqrt[3]{n^2}}{2}.$$

**Ответ.** $P=\dfrac{1}{2}(n^2-\sqrt{n^4-1})\sqrt[3]{n^2}$.

101. $P=\sqrt[3]{\dfrac{2n}{n+1}}$.

102. Указание. После упрощения находим:

$$P=\frac{2x^4}{x^8-16y^8}.$$

**Ответ.** $P=-\dfrac{1}{11}$.

103. Заменяя $x$ его значением, находим:

$$P=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}+\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}\right)=$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}=1.$$

Здесь

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},\quad \sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

**Ответ.** $P=1$.

104. 0.

**105.** Упрощая и заменяя $x$ его значением, будем иметь:

$$x\sqrt{x}\sqrt{1-x^3} = \sqrt[3]{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2a}} \times$$

$$\times \sqrt{\sqrt[3]{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2a}} \cdot \sqrt{1-\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2a}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2a}} \cdot \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2a}} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2}} = \frac{b}{2a}.$$

**Ответ.** $\frac{b}{2a}$.

**106.** Имеем:

$$a+1 = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + 1 = 3-\sqrt{3},$$

$$b+1 = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + 1 = 3+\sqrt{3}.$$

$$P = \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}} = 1.$$

**Ответ.** $P = 1$.

**107.** 0.

**108.** $P = x^{\frac{2}{m}} + x^{\frac{2}{n}} + 2x^{\frac{m+n}{mn}} - 4a^2x^{\frac{m+n}{mn}} =$

$$= x^{\frac{2}{m}}\left[\left(1+x^{\frac{m-n}{mn}}\right)^2 - 4a^2x^{\frac{m-n}{mn}}\right] =$$

$$= x^{\frac{2}{m}}\left(1+x^{\frac{m-n}{mn}} - 2ax^{\frac{m-n}{2mn}}\right)\left(1+x^{\frac{m-n}{mn}} + 2ax^{\frac{m-n}{2mn}}\right) = 0,$$

так как

$$1+x^{\frac{m-n}{mn}} - 2ax^{\frac{m-n}{2mn}} = 1+(a+\sqrt{a^2-1})^2 -$$

$$-2a(a+(\sqrt{a^2-1}) = 1+(a+\sqrt{a^2-1})(\sqrt{a^2-1}-a) =$$

$$= 1+a^2-1-a^2 = 0.$$

**Ответ.** $P = 0$.

**109.** $P = \frac{m^2}{n^2}$.

**110.** Имеем: $\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} =$

$$= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4}.$$

**Ответ.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

**111.** Разлагая знаменатель на множители, находим:

$$\frac{1}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{2}+1)} = \frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}-1)}{(5-4)(2-1)} = (\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}-1).$$

**Ответ.** $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}-1)$.

**112.** Имеем:

$$\frac{1}{\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)+1} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left[\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)+1\right]\left(\sqrt[3]{2}-1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\sqrt[3]{4}}{2}.$$

**Ответ.** $1-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}$.

**113.** $2\left(\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{55}+\sqrt[3]{25}\right)$.

**114.** Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}\right)\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2} = \sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}.$$

**Ответ.** $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$.

Примечание. Общий метод решения см. № 115.

**115.** Воспользуемся тождеством:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-$$
$$-xz-yz).$$

Обозначая

$$x=\sqrt[3]{a},\quad y=\sqrt[3]{b},\quad z=\sqrt[3]{c},$$

находим:

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right).$$

Чтобы уничтожить иррациональность в знаменателе данной дроби, необходимо умножить ее числитель и знаменатель на выражение

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc},$$

т. е.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}}{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)}{\sqrt[3]{(a+b+c)^3}-\sqrt[3]{27abc}}.$$

Если произведение трех чисел $abc$ есть точный куб, то решение задачи на этом заканчивается. В противном случае умножаем числитель и знаменатель полученного выражения на неполный квадрат суммы двух чисел, т. е. на выражение

$$(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

и после преобразований находим результат:

**Ответ.** $$\frac{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)\times\left[(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right]}{(a+b+c)^3-27abc}.$$

**116.** В данном примере знаменатель дроби является суммой четырех членов геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $\sqrt[4]{2}$. Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2^2}+\sqrt[4]{2^3}+\sqrt[4]{2^4}}=\frac{1}{\frac{2\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}-1}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}}=\frac{\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\sqrt[4]{2^3}}{2}.$$

**Ответ.** $$\frac{2-\sqrt[4]{8}}{2}.$$

**117.** Указание. Обозначить

$$\sqrt[n]{a} = x,\ \sqrt[n]{b} = y,$$

тогда

$$x^n = a,\ y^n = b,$$

т. е.

$$a - b = \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right).$$

Последующие преобразования очевидны.

**Ответ.** $\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}}{a - b}$.

**118.** Указание. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}}{\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{9}} =$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}\left(\sqrt[6]{8} - \sqrt[6]{9}\right)}{\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{9}} \text{ и т. д.}$$

**Ответ.** $\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}\left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}\right)\left(4 + 2\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{3}\right)$.

**119.** $\dfrac{(5 + \sqrt{3})^5}{22^5}$.

**120.** Обозначая

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{1}{k},$$

находим:

$$x = ak,\ y = bk,\ z = ck,$$

$$k = \frac{x + y + z}{a + b + c}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{k}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} =$$

$$= \frac{1}{(1 + \sqrt{k})(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} = \ldots =$$

$$= \frac{(1 - \sqrt{k})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})}{(1 - k)(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc)}.$$

Если в последнем выражении $k$ заменить его значением, находим

$$\sqrt{a+b+c}\,(\sqrt{a+b+c}-\sqrt{x+y+z})\times$$
$$\times\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})\,(a+b-c-2\sqrt{ab})$$

**Ответ.** $\dfrac{}{(a+b+c-x-y-z)\,(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)}$.

**121.** Числитель данной дроби легко разлагается на множители; знаменатель можно разложить на множители, если к нему прибавить и отнять одночлен $\sqrt[3]{a^2b^2}$. Выполняя последовательно указанные действия, находим результат:

$$P=\frac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-2\sqrt[3]{a^3b}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{b^4}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\sqrt[3]{a^2}}{\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2\sqrt[3]{a^2}}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\sqrt[3]{a^2}}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{a-\sqrt[3]{a^2b}}{a+b}.$$

**Ответ.** $P=\dfrac{a-\sqrt[3]{a^2b}}{a+b}$.

**123.** Имеем:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b)^3+c^3-3ab\,(a+b)=$$
$$=-3ab\,(a+b)=3abc,$$

так как $a+b=-c$; $(a+b)^3=-c^3$.

**124.** Указание. Раскрыть скобки в правой части равенства, привести подобные члены и результат разложить на множители.

**125.** Указание. Обозначая

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=x,$$

находим $x^2=2\,(a+\sqrt{a^2-b})=4\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right)$,

откуда

$$x=2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

следовательно,

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}. \qquad (1)$$

Аналогично

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=2\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) находим окончательный результат.

**126.** Указание. Порядок выполнения действий: перемножить последние два радикала, полученный новый радикал $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ умножить на второй радикал и, наконец, найденный радикал $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ перемножить с первым.

**127.** Обозначим

$$z=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$z^3=(20+14\sqrt{2})+(20-14\sqrt{2})+$$
$$+3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)=40+3\sqrt[3]{20^2-14^2\cdot 2}\cdot z=40+6z$$

или

$$z^3-6z-40=0. \qquad (1)$$

Известно, что если алгебраическое уравнение имеет целые вещественные коэффициенты, а коэффициент при высшей степени неизвестной равен единице, то рациональными корнями этого уравнения могут быть только целые числа; они являются делителями свободного члена. Легко убедиться, что $z=4$ удовлетворяет данному уравнению.

Разлагая выражение на множители, находим:

$$(z-4)(z^2+4z+10)=0.$$

Приравнивая второй множитель нулю и решая полученное квадратное уравнение, находим два комплексных корня. Следовательно, уравнение (1) имеет один вещественный и два комплексных корня.

**Ответ.** $z=4$.

**128.** Решение аналогично предыдущему.

**129.** Правые и левые части данного равенства положительные, следовательно, их квадраты равны. Возводим правую и левую части равенства в квадрат; находим:

$$8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{64-4(10+2\sqrt{5})}+$$
$$+8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}=2(6-2\sqrt{5}).$$
$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1,$$
$$\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1,$$

что и требовалось доказать.

**134.** Преобразуем данное уравнение к виду

$$(x-a)^3 - 3(x-a)\,bcp - b^3p - c^3p^2 = 0.$$

Заменяя $x$ его значением, имеем:

$$\left(bp^{\frac{1}{3}} + cp^{\frac{2}{3}}\right)^3 - 3\left(bp^{\frac{1}{3}} + cp^{\frac{2}{3}}\right) bcp - b^3p - c^3p^2 = 0$$

и, после элементарных преобразований, убеждаемся, что заданное уравнение обращается в тождество, что и требовалось доказать.

**135.** Обозначая

$$a = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}; \quad b = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}},$$

находим: $a^3 + b^3 = -2q$, $ab = -p$.

Так как $x_0 = a + b$, то $x_0^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, т. е. $x_0^3 = -2q - 3px_0$; $x_0^3 + 3px_0 + 2q = 0$, и т. д.

**136.** Указание. Сложить дроби и разложить числитель на простые множители.

**137.** Имеем: $\dfrac{bc + ac + ab}{abc} = \dfrac{1}{a+b+c}$,

или $(bc + ac + ab)(a + b + c) - abc = (a + b)(b + c)(a + c) = 0$.

Произведение нескольких сомножителей равно нулю, когда хотя бы один из них равен нулю. Приравнивая один из сомножителей нулю, находим, что два числа равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

**138.** Указание. Преобразовать данное выражение к виду

$$\frac{(2n+3)^2 + 11}{4}.$$

**139.** Обозначим три последовательных целых числа $x - 1$, $x$ и $x + 1$. Тогда число

$$N = (x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = 3x(x^2 + 2).$$

При делении $x$ на 3 в остатке может быть: 0, 1, 2 Следовательно, число $x$ можно записать так: $3n$, $3n + 1$, $3n + 2$. Отсюда

$$N = 9n(9n^2 + 2),$$
$$N = 9(3n + 1)(3n^2 + 2n + 1),$$
$$N = 9(3n + 2)(3n^2 + 4n + 2).$$

Итак, при любом целом $x$ число $N$ кратно 9.

**141.** Указание.

$$P = \frac{(x-y)(x-z)(y-z)(x+y+z)}{(x-y)(x-z)(y-z)}.$$

**Ответ.** $P = x + y + z$.

**142.** Пусть $x = 1$; тогда

$$(6 - 5 + 4 - 3 + 1 - 2)^{1962} = 1$$

**Ответ.** 1.

**144.** Если сгруппировать отдельно члены содержащие $x$ в четных и нечетных степенях, то получим:

$$[(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{100}) - (x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{99})] \times$$
$$\times [(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{100}) + (x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{99})] =$$
$$= (1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{100})^2 - x^2 (1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{98})^2,$$

что и требовалось доказать.

**145.** $P = (x^2 + 8x + 15)(x^2 + 8x + 7) + 15 = (x^2 + 8x)^2 +$
$$+ 22 (x^2 + 8x) + 120 = (x^2 + 8x + 11)^2 - 1 =$$
$$= (x^2 + 8x + 10)(x^2 + 8x + 12) = (x^2 + 8x + 10)(x + 2)(x + 6).$$

**Ответ.** $P = (x + 2)(x + 6)(x^2 + 8x + 10)$.

**146.** $P = (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 10 = (x - 7x)^2 +$
$$+ 2 \cdot 9 (x^2 - 7x) + 82 = (x^2 - 7x + 9)^2 + 1.$$

При всех вещественных значениях $x$ первое слагаемое положительное, следовательно, рассматриваемое выражение также положительное.

**147.** Сделаем следующие преобразования:

$$P = (x - 1)(x - 4)(x - 2)(x - 3) + 10 =$$
$$= (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + 10 =$$
$$= [(x^2 - 5x)^2 + 10 (x^2 - 5x) + 24 + 1] + 9 =$$
$$= (x^2 - 5x + 5)^2 + 9.$$

Наименьшее значение данного многочлена будет в том случае, когда первое слагаемое обратится в нуль, т. е.:

$$x^2 - 5x + 5 = 0.$$

**Ответ.** 9.

**148.** Имеем:

$$(1 + \sqrt{10})^{100} = 1 + 100\sqrt{10} + \cdots + \sqrt{10^{100}},$$
$$(1 - \sqrt{10})^{100} = 1 - 100\sqrt{10} + \cdots + \sqrt{10^{100}},$$

следовательно,

$$\sqrt{10}[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100}] =$$
$$= \sqrt{10}[200 (\sqrt{10} + \sqrt{10^3} + \cdots + \sqrt{10^{99}})] =$$
$$= 200 (10 + 10^2 + \cdots + 10^{50}),$$

т. е. число целое.

**149.** Указание. Числа такого вида (в десятичной системе счисления) можно представить так:

$$\underbrace{4444\ldots4}_{n}\ \underbrace{88\ldots89}_{n-1} = 4\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n}\cdot 10^n + 8\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n} + 1$$

Но

$$\underbrace{111\ldots1}_{n} = 10^{n-1} + \cdots + 10^2 + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{9},$$

поэтому

$$444\ldots89 = \frac{4}{9}(10^n - 1)\cdot 10^n + \frac{8}{9}(10^n - 1) + 1 =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot 10^{2n} + \frac{4}{9}\cdot 10^n + \frac{1}{9} = \left(\frac{2\cdot 10^n + 1}{3}\right)^2.$$

Сумма цифр числа $2\cdot 10^n + 1$ кратна трем, следовательно, число, стоящее в скобках, делится без остатка на три, т. е. оно целое и является точным квадратом.

**150.** Указание.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x+y+z} = \frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{xyz(x+y+z)} = 0,$$

т. е. $(x + y)(x + z)(y + z) = 0.$ (1)

Аналогично преобразуя второе равенство, получим:

$$(x^n + y^n)(x^n + z^n)(y^n + z^n) = 0 \quad (2)$$

Если $n$ нечетное, то из соотношения (1) вытекает соотношение (2). В самом деле, пусть $y + z = 0$; тогда $z = -y$, поэтому

$$y^n + z^n = y^n - y^n = 0.$$

**151.** Указание. См. № 152.

**Ответ.** $\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1$.

**152.** Положим

$$\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Возведя обе части равенства в квадрат, находим:

$$a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz},$$

откуда

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ 2\sqrt{xy} &= \sqrt{b} \\ 2\sqrt{xz} &= \sqrt{c} \\ 2\sqrt{yz} &= \sqrt{d}. \end{aligned} \quad (1)$$

Итак, соотношение между $a$, $b$, $c$ и $d$, при котором искомое преобразование имеет место, можно найти, исключая $x$, $y$ и $z$ из найденных равенств (1):

$$xy = \frac{b}{4}, \quad xz = \frac{c}{4}, \quad yz = \frac{d}{4}, \quad xyz = \frac{\sqrt{bcd}}{8}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}, \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}, \quad z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) находим искомое соотношение:

$$a = \frac{bc + bd + cd}{2\sqrt{bcd}},$$

где $bcd$ — точный квадрат.

## § 3. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

**153.** $x = a + b + c$.

**154.** $x = a$.

**156.** Указание. Воспользоваться производной пропорцией. При проверке корня разложить числитель и знаменатель дробей на множители

**Ответ.** $x = \frac{ab}{c}$.

**157.** $u = 2$, $v = 1$.

**158.** $x_1 = \frac{3}{2}$, $y_1 = \frac{11}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{11}{2}$.

**159.** $m = 0, \pm 1, \pm 2$.

**160** $x = \frac{c-b}{a+b+c}$, $y = \frac{a-c}{a+b+c}$, $z = \frac{b-a}{a+b+c}$.

**161.** $x = 11$, $y = 13$, $z = 15$, $u = 17$.

**162.** $x = 1$, $y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{5}$, $v = \frac{1}{7}$.

**163.** $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 1$, $x_5 = -3$, $x_6 = -2$.

**164.** $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, $x_5 = -5$, $x_6 = -3$, $x_7 = -1$.

**165.** $x_1 = x_6 = 3$, $x_2 = x_5 = 5$, $x_3 = x_4 = 6$.

**166.** $x_i = 0$; $(i = 1, 2, \ldots, 100)$.

**167.** $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n+1}$.

**168.** $x_i = \pm\sqrt{2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

**169.** $x_1 = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$, $x_2 = -1, \ldots, x_n = -(n-1)$.

**170.** $x_1 = \frac{2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n^2(n+1)} - \frac{a_1 - a_2}{n}, \ldots$

## § 4. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

**171.** Известно, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ с рациональными коэффициентами, имеющее корень $x_1 = 4 - \sqrt{3}$, имеет и корень, сопряженный данному, т. е. $x_2 = 4 + \sqrt{3}$. Отсюда

$$p = -(4 + \sqrt{3} + 4 - \sqrt{3}) = -8,$$

$$q = (4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}) = 13.$$

Искомое уравнение будет

$$x^2 - 8x + 13 = 0.$$

**172.** Если $x_1 = 2 + 5i$, то $x_2 = 2 - 5i$. Отсюда (см. № 171) $p = -4$, $q = 29$.

Искомое уравнение

$$x^2 - 4x + 29 = 0.$$

**173.** Пусть $x_1 > x_2$, тогда

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \times$$

$$\times [(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \times$$

$$\times [(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] = 1,$$

где $x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{85}}{4}$, $x_1x_2 = \frac{21}{16}$.

**Ответ.** 1.

**174.** Указание. Преобразовать числитель и знаменатель дроби к виду

$$\frac{3(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2}{4x_1x_2(x_1 + x_2)}.$$

Использовать формулы Виета.

**175.** Пусть корни данного уравнения будут $x_1$ и $x_2$. Тогда по формулам Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = p; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q. \tag{1}$$

Допустим, что искомое уравнение имеет вид:

$$x^2 + px + q = 0. \tag{2}$$

Следовательно, задача сводится к определению коэффициентов $p$ и $q$ по его корням для каждого из перечисленных здесь случаев.

1) Если корни уравнения (2) $(-x_1)$ и $(-x_2)$, то

$$p = -[-(x_1 + x_2)] = -\frac{b}{a}, \quad q = (-x_1)(-x_2) = \frac{c}{a},$$

откуда искомое уравнение будет

$$x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

т. е.

$$ax^2 - bx + c = 0.$$

2) Если корни уравнения (2) $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$, то

$$p = -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = \frac{-(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c},$$

$$q = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = 1 : \frac{c}{a} = \frac{a}{c},$$

откуда находим искомое уравнение:

$$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0,$$

т. е.

$$cx^2 + bx + a = 0.$$

3) Если корни уравнения (2) $x_1 + n$ и $x_2 + n$, то

$$p = -(x_1 + x_2 + 2n) =$$

$$= -\left(-\frac{b}{a} + 2n\right) = \frac{b}{a} - 2n;$$

$$q = (x_1 + n)(x_2 + n) = x_1 x_2 + (x_1 + x_2)n + n^2 =$$

$$= \frac{c}{a} - \frac{b}{a}n + n^2.$$

Искомое уравнение

$$x^2 + \left(\frac{b}{a} - 2n\right)x + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}n + n^2 = 0,$$

т. е.

$$ax^2 + (b - 2an)x + (an^2 - bn + c) = 0.$$

4) Если корни уравнения (2) $x_1 n$ и $x_2 n$, то

$$p = -n(x_1 + x_2) = \frac{nb}{a},$$

$$q = n^2 x_1 x_2 = \frac{n^2 c}{a}.$$

Искомое уравнение

$$x^2 + \frac{nb}{a}x + \frac{n^2 c}{a} = 0,$$

т. е.

$$ax^2 + nbx + n^2c = 0.$$

**176.** Решение аналогично предыдущему.

**Ответ.** $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)\,x + c^2 = 0$

**177.** Чтобы заданное уравнение имело два равных корня, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант этого квадратного уравнения был равен нулю, т. е.

$$[2(\lambda + 1)]^2 - 4(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0,$$

откуда $\lambda = \frac{1}{5}$.

**Ответ.** $\lambda = \frac{1}{5}$.

**178.** Корни заданного уравнения будут рациональные, если из его дискриминанта извлекается точно квадратный корень, т. е. если $1 + 4k$ есть полный квадрат.

**Ответ.** $k = 2;\ 6;\ 12;\ \ldots$

**179.** Обозначим искомые корни квадратного уравнения через $x_1$ и $x_2$, и пусть, согласно условию задачи

$$x_1 = 2x_2. \tag{1}$$

По формулам Виета

$$x_1 + x_2 = \frac{2m + 1}{2}, \tag{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2 - 9m + 39}{2}. \tag{3}$$

Заменяя в равенствах (2) и (3) значения $x_1$, по формуле (1) находим:

$$3x_2 = \frac{2m + 1}{2},$$

$$2x_2^2 = \frac{m^2 - 9m + 39}{2},$$

или

$$2\left(\frac{2m + 1}{6}\right)^2 = \frac{m^2 - 9m + 39}{2},$$

т. е.

$$m^2 - 17m + 70 = 0.$$

Следовательно, $m_1 = 7$, $m_2 = 10$.

Подставляя найденные значения $m$ в данное уравнение, получим следующих два квадратных уравнения:

$$2x^2 - 15x + 25 = 0$$

$$2x^2 - 21x + 49 = 0.$$

**Ответ.** $x_1 = 5$, $x_2 = 2{,}5$; $x_1' = 7$, $x_2' = 3{,}5$.

**180.** $z^2 - 35z + 216 = 0$,
где $z = x^3$ (см. № 181).

**181.** Обозначим корень искомого квадратного уравнения

$$z = x^3,$$

откуда $x = \sqrt[3]{z}$.

Следовательно,

$$a\sqrt[3]{z^2} + b\sqrt[3]{z} + c = 0.$$

Освобождаясь от иррациональности, находим:

$$a^3z^2 + 3abz\left(a\sqrt[3]{z^2} + b\sqrt[3]{z}\right) + b^3z = -c^3,$$

т. е.

$$a^3z^2 - 3abcz + b^3z + c^3 = 0.$$

**Ответ.** $a^3z^2 + b(b^2 - 3ac)z + c^3 = 0$.

**182.** Обозначим $x_1$ и $x_2$ — корни данного уравнения; получим:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) =$$

$$= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] =$$

$$= -p(p^2 - 3q) = p(3q - p^2),$$

где

$$x_1 + x_2 = -p,\ x_1x_2 = q.$$

**Ответ.** $p(3q - p^2)$.

**183.** Обозначая корни данного уравнения $x_1$ и $x_2 = x_1^2$, по формулам Виета получим:

$$x_1 + x_1^2 = \frac{15}{4},$$

т. е.

$$4x_1^2 + 4x_1 - 15 = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{3}{2};\quad x_1' = -\frac{5}{2};$$

$$x_2 = \frac{9}{4};\quad x_2' = \frac{25}{4}.$$

**Ответ.** $m_1 = \pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}};\quad m_2 = \pm\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\,i.$

**184.** $p = q = 0$; $p = 1$, $q = -2$.

**185.** Указание. Квадратное уравнение имеет действительные корни, если его дискриминант не отрицателен, т. е.

$$4 + \log_2 a \geqslant 0.$$

**Ответ.** $a \geqslant 2^{-4}$.

**186.** Указание. Воспользоваться формулами Виета. Составить и решить систему уравнений:

$$x_1 + x_2 = \frac{1-2m}{2},$$

$$x_1 x_2 = \frac{m-1}{2},$$

$$3x_1 - 4x_2 = 11.$$

**Ответ.** $m_1 = -2$; $m_2 = \frac{33}{8}$.

**187.** Указание. Решение аналогично предыдущему.

$$x_1 + x_2 = 2k + 1,$$
$$x_1 x_2 = k^2 + 2,$$
$$x_2 = \frac{1}{2} x_1,$$

где $x_1$ и $x_2$ — корни данного квадратного уравнения.

**Ответ.** $k = 4$.

**188.** По формулам Виета

$$x_1 + x_2 = a,$$
$$x_1 x_2 = a - 1.$$

Кроме того,

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2(a-1) = (a-1)^2 + 1.$$

Из последнего соотношения следует, что $x_1^2 + x_2^2$ будет наименьшим, когда одно из положительных слагаемых правой части равно нулю, т. е. $a - 1 = 0$, откуда $a = 1$.

**Ответ.** $a = 1$.

**189.** Пусть $x_1$ — общий корень. Обозначим корни первого уравнения $x_1$ и $x_2$, второго — $x_1$ и $x_2'$. По формулам Виета находим:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

$$x_1 + x_2' = -\frac{b_1}{c_1}, \qquad (1)$$

$$x_1 x_2' = \frac{c_1}{a_1}.$$

Если $x_1$ — общий корень заданных уравнений, то система уравнений (1) имеет корни $x_1$, $x_2$ и $x_2'$; верно и обратное.

Итак, искомое условие является таким, при котором система уравнений (1) имеет общее решение; оно находится исключением $x_1$, $x_2$ и $x_2'$ из уравнений найденной системы и имеет вид:

$$(ca_1 - ac_1)^2 - (ab_1 - ba_1)(bc_1 - cb_1) = 0.$$

Если $ab_1 - ba_1 = 0$ и $ca_1 - ac_1 \neq 0$, то заданные уравнения общего решения не имеют.

Если $ab_1 - ba_1 \neq 0$ и $ca_1 - ac_1 \neq 0$, то уравнения имеют один общий корень.

Если $ab_1 - ba_1 = 0$ и $ca_1 - ac_1 = 0$, то уравнения имеют два общих корня, так как при этом их коэффициенты пропорциональны, т. е.

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Например, для двух уравнений

$$x^2 + \lambda x + 1 = 0$$
$$x^2 + x + \lambda = 0$$

из общего соотношения находим:

$$(1 - \lambda)^2 - (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 1$.

Данные уравнения имеют один общий корень при $\lambda = -2$; два общих корня при $\lambda = 1$.

**190.** 1. Из первого уравнения

$$m = \frac{2x^2 - 2x + 12}{3x}.$$

Подставляя его во второе уравнение, получим квадратное уравнение

$$x^2 - 4x = 0,$$

откуда $x_1 = 4$ ($x_2 = 0$), следовательно, $m = 3$.

2. Для решения задачи можно использовать общий метод, приведенный в № 189.

**191.** Биквадратное уравнение с рациональными коэффициентами имеет в данном случае четыре корня: $\pm\sqrt{5}$ и $\pm 3i$.

Следовательно:

$$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x + 3i)(x - 3i) = 0,$$

т. е.

$$(x^2 - 5)(x^2 + 9) = 0.$$

**Ответ.** $x^4 + 4x^2 - 45 = 0$.

**192.** $k_1 = 6$, $k_2 = -\frac{6}{19}$.

**193.** Указание. Если обозначить

$$x^2 - 16x = z,$$

то заданное уравнение принимает вид:

$$z^2 - 2z - 63 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 9, \; z_2 = -7.$$

Следовательно,

$$x^2 - 16x - 9 = 0,$$

$$x^2 - 16x + 7 = 0.$$

**Ответ.** $x_{1,2} = 8 \pm \sqrt{73}$, $x_{3,4} = 8 \pm \sqrt{57}$.

**194.** Указание. Обозначить

$$x^2 + x + 1 = z.$$

**Ответ.** $x_1 = -2$; $x_2 = 1$, $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}$.

**195.** Указание. Обозначая

$$x^2 + 2x + 3 = z,$$

находим

$$\frac{z+4}{z} = z + 1,$$

$$z_1 = 2, \; z_2 = -2.$$

**Ответ.** $x_{1,2} = -1$, $x_{3,4} = -1 \pm 2i$.

**196.** Указание. Имеем

$$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = \frac{9}{16}.$$

Обозначая $x^2 + 3x + 2 = z$, находим $16z^2 - 32z - 9 = 0$.

**Ответ.** $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{2}}{2}$, $x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{10}}{2}$.

**197.** Указание. Имеем:

$$(x - 4)(x - 7)(x - 5)(x - 6) = 1680,$$

$$(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680.$$

Обозначая $x^2 - 11x + 30 = z$, находим уравнение

$$(z - 2)z - 1680 = 0.$$

**Ответ.** Вещественные корни уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 12$.

**198.** Если умножить обе части заданного уравнения на 16, получим:

$$(8x + 7)^2 (8x + 6)(8x + 8) = 72,$$

$$(64x^2 + 112x + 49)(64x^2 + 112x + 48) = 72.$$

Обозначая $64x^2 + 112x + 48 = z$, находим $(z + 1)\, z = 72$ откуда $z_1 = 8$, $z_2 = -9$.

Решение заданного уравнения сводится к решению двух квадратных уравнений:

$$64x^2 + 112x + 40 = 0$$

$$64x^2 + 112x + 57 = 0.$$

**Ответ.** $x_1 = -\frac{5}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-7 \pm 2\sqrt{2i}}{8}$.

**199.** $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_{3,4} = \frac{5 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

**200.** Имеем:

$$(x + a)(x - 3a)(x + 2a)(x - 4a) = b^4,$$

$$(x^2 - 2ax - 3a^2)(x^2 - 2ax - 8a^2) - b^4 = 0,$$

$$(x^2 - 2ax)^2 - 11a^2(x^2 - 2ax) + 24a^4 - b^4 = 0.$$

Обозначая $x^2 - 2ax = a^2 z$, находим $a^4z^2 - 11a^4z + 24a^4 - b^4 = 0$,

$$z^2 - 11z + \left(24 - \frac{b^4}{a^4}\right) = 0,$$

$$z = \frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{25a^4 + 4b^4}}{2a^2},$$

т. е. $x^2 - 2ax = \frac{11a^2 \pm \sqrt{25a^4 + 4b^4}}{2}$.

**Ответ.** $x = \frac{2a \pm \sqrt{26a^2 \pm 2\sqrt{25a^4 + 4b^4}}}{2}$.

**201.** Указание. Разделить почленно каждое слагаемое уравнения на $x^2$ и обозначить

$$x + \frac{1}{x} = z.$$

**Ответ.** $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$, $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

**202.** Имеем:

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 2x^4 + 2,$$

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0.$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

Обозначая $x + \frac{1}{x} = z$, находим, что $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$.

Следовательно,

$$z^2 - 4z - 8 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 2(1 + \sqrt{3}),$$
$$z_2 = 2(1 - \sqrt{3})$$

т. е.

$$x + \frac{1}{x} = 2(1+\sqrt{3}),$$

$$x + \frac{1}{x} = 2(1 - \sqrt{3}),$$

или

$$x^2 - 2(1 + \sqrt{3})\, x + 1 = 0$$
$$x^2 - 2(1 - \sqrt{3})\, x + 1 = 0.$$

Решая первое уравнение, получим:

$$x_{1,2} = (1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 - 1} = (1 + \sqrt{3}) \pm$$
$$\pm \sqrt{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})} = (1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} \times$$
$$\times \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} = (1 + \sqrt{3})\left(1 \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

Аналогично решается второе уравнение.

**Ответ.** $x_{1,2} = (1 + \sqrt{3})\left(1 \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right),$

$$x_{3,4} = (1 - \sqrt{3})\left(1 \pm \frac{i\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

**203.** Обозначим $3 - x = z$, $2 - x = t$; тогда $5 - 2x = z + t$. Заданное уравнение принимает вид:

$$z^4 + t^4 = (z + t)^4$$

т. е.

$$z^4 + t^4 = z^4 + t^4 + 4z^3t + 6z^2t^2 + 4zt^3,$$

или

$$zt(2z^2 + 3zt + 2t^2) = 0.$$

Следовательно, при

$$z = 0 \quad 3 - x = 0; \quad x_1 = 3;$$
$$t = 0 \quad 2 - x = 0; \quad x_2 = 2.$$
$$2z^2 + 3zt + 2t^2 = 0,$$
$$2(3 - x)^2 + 3(3 - x)(2 - x) + 2(2 - x)^2 = 0.$$

Решая полученные три уравнения, находим искомые корни заданного уравнения.

**Ответ.** $x_1 = 3;\ x_2 = 2;\ x_{3,4} = \dfrac{35 \pm i\sqrt{7}}{14}$.

**204.** Обозначая $x^2 - 2x + 2 = z$, преобразуем заданное уравнение к виду

$$\frac{1}{z} + \frac{2}{z+1} = \frac{6}{z+2},$$

т. е.

$$3z^2 - z - 2 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 1,\ z_2 = -\frac{2}{3}.$$

Следовательно, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $3x^2 - 6x + 8 = 0$.

**Ответ.** $x_{1,2} = 1;\ x_{3,4} = \dfrac{3 \pm i\sqrt{15}}{3}$.

**205.** Указание. Обозначая $6x + 5 = z$, приводим заданное уравнение к виду

$$z^4 - z^2 - 420 = 0,$$

откуда $z_{1,2} = \pm\sqrt{21};\ z_{3,4} = \pm 2\sqrt{5}\cdot i$.

**Ответ.** $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{6},\ x_{3,4} = \dfrac{-5 \pm 2\sqrt{5}\cdot i}{6}$.

**206.** Обозначим $\dfrac{x+1}{x} = z$; после преобразования заданное уравнение принимает вид:

$$4z^4 - 17z^2 + 4 = 0,$$

откуда

$$z_{1,2} = \pm\frac{1}{2},\quad z_{3,4} = \pm 2,$$

т. е.

$$\frac{x+1}{x} = \pm\frac{1}{2},\quad \frac{x+1}{x} = \pm 2.$$

**Ответ.** $x_1 = -2,\ x_2 = -\dfrac{2}{3},\ x_3 = -\dfrac{1}{3},\ x_4 = 1$.

**207.** Обозначим $\dfrac{x^3 + x - 1}{x+1} = u$: тогда данное уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{u} + u = 2,$$

или $u^2 - 2u + 1 = 0$, откуда $u_{1,\,2} = 1$

Следовательно, имеем уравнение

$$\frac{x^3 + x - 1}{x + 1} = 1,$$

или

$$x^3 - 2 = 0.$$

Решим это двучленное уравнение. Пусть $x = z\sqrt[3]{2}$; тогда предыдущее уравнение принимает вид:

$$z^3 - 1 = 0.$$

Разлагая это выражение на множители и приравнивая каждый множитель нулю, находим два уравнения:

$$z - 1 = 0$$

и

$$z^2 + z + 1 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 1,$$

$$z_{2,\,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

**Ответ.** $x_1 = \sqrt[3]{2}$, $x_{2,\,3} = \dfrac{(-1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{2}}{2}$.

**208.** Обозначим $x^3 + 1 = u$; тогда заданное уравнение принимает вид:

$$u + \frac{1}{u} = \frac{5}{2},$$

или

$$2u^2 - 5u + 2 = 0,$$

откуда

$$u_1 = 2, \quad u_2 = \frac{1}{2};$$

следовательно,

$$x^3 + 1 = 2, \text{ т. е. } x^3 - 1 = 0, \tag{1}$$

$$x^3 + 1 = \frac{1}{2}, \text{ т. е. } x^3 + \frac{1}{2} = 0. \tag{2}$$

Решая первое уравнение, находим:

$$x_1 = 1, \quad x_{2,\,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Решая второе уравнение, находим.

$$x_4 = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, \qquad x_{5,6} = \frac{(1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{4}}{4}.$$

209. Пусть $x + 1 = u$; тогда заданное уравнение принимает вид:

$$u^6 - 9u^3 + 20 = 0.$$

Обозначая $u^3 = z$, имеем

$$z^2 - 9z + 20 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 4, \quad z_2 = 5.$$

Следовательно,

$$u^3 = 4, \text{ или } u^3 - 4 = 0, \tag{1}$$

$$u^3 = 5, \text{ или } u^3 - 5 = 0. \tag{2}$$

Решая первое уравнение, находим:

$$u_1 = \sqrt[3]{4}; \quad u_{2,3} = \frac{(-1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{4}}{2},$$

поэтому

$$x_1 = \sqrt[3]{4} - 1; \quad x_{2,3} = \frac{(-1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{4}}{2} - 1.$$

Решая второе уравнение, получим:

$$u_4 = \sqrt[3]{5}; \quad u_{5,6} = \frac{(-1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{5}}{2},$$

поэтому

$$x_4 = \sqrt[3]{5} - 1; \quad x_{5,6} = \frac{(-1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{5}}{2} - 1.$$

210. Обозначим

$$5 - x = z + k,$$

$$2 - x = z - k,$$

откуда

$$k = \frac{3}{2}, \qquad x = \frac{7}{2} - z.$$

Заданное уравнение принимает вид:

$$\left(z + \frac{3}{2}\right)^4 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^4 = 17,$$

или

$$16z^4 + 216z^2 - 55 = 0,$$

откуда

$$z_{1,2} = \pm\frac{1}{2}, \qquad z_{3,4} = \pm\frac{i\sqrt{55}}{2}.$$

**Ответ.** $x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_{3,4} = \dfrac{7 \pm i\sqrt{55}}{2}$.

**211.** У к а з а н и е. Данное уравнение переписать так:

$$(x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - 132 = 0.$$

Обозначая $x^2 - x = z$, находим:

$$z^2 - z - 132 = 0,$$

откуда

$$z_1 = -11 \quad z_2 = 12.$$

**Ответ.** $x_1 = -3,\ x_2 = 4,\ x_{3,4} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{43}}{2}$.

**212.** У к а з а н и е. Имеем:

$$68x^8 - 257x^6 - 257x^2 + 68 = 0,$$

$$68\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) - 257\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

$$68\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 257\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 136 = 0.$$

**Ответ.** $x_{1,2} = \pm 2,\ x_{3,4} = \pm \dfrac{1}{2}$,

$$x_{5,6} = \frac{\sqrt{13} \pm i\sqrt{21}}{\sqrt{34}}, \qquad x_{7,8} = \frac{-\sqrt{13} \pm i\sqrt{21}}{\sqrt{34}}.$$

**213.** Обозначим $x - 1 = y$; имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 97, & (1) \\ x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

Введем новую переменную, обозначая $x + y = z$. Решая это уравнение с уравнением (2) находим:

$$x = \frac{z+1}{2}; \qquad y = \frac{z-1}{2}. \qquad (3)$$

Подставляя эти значения в уравнение (1), имеем:

$$\left(\frac{z+1}{2}\right)^4 + \left(\frac{z-1}{2}\right)^4 = 97,$$

и, после преобразования, приходим к биквадратному уравнению

$$z^4 + 6z^2 - 775 = 0,$$

откуда $z^2 = 25$, следовательно, $z_1 = 5$; $z_2 = -5$ и $z^2 = -31$, следовательно, $z_3 = i\sqrt{31}$; $z_4 = -i\sqrt{31}$.

Заменяя $z$ его значениями в равенствах (3), находим:

**Ответ.** $x_1 = -2, \quad x_2 = 3, \quad x_{3,4} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{31}}{2}$.

214. $x_1 = 5, \quad x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm i3\sqrt{3}}{2}$,

$$x_4 = 0, \quad x_{5,6} = 3 \pm i\sqrt{3}.$$

215. $x_1 = 2, \quad x_2 = -\dfrac{1}{2}, \quad x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$.

216. $x_1 = 1, \quad x_{2,3} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

217. $x_1 = -1, \quad x_{2,3} = 2$.

218. Согласно условию задачи, $u_1$ и $u_2$ — последовательные члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии, поэтому знаменатель прогрессии

$$q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{5}.$$

Зная $u_1$ и $q$, находим $k = \dfrac{25}{12}$.

Подставляя значение $k$ в данное уравнение, находим:

$$(1 + x^2)^2 = \frac{25}{6} x (1 - x^2)$$

или

$$6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0.$$

Решая это возвратное уравнение, находим:

**Ответ.** $x_1 = -3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = \dfrac{1}{3}, \quad x_4 = \dfrac{1}{2}$.

219. Указание. Решение сводится к решению одного трехчленного и двух двучленных уравнений.

**Ответ.** $x_1 = -1, \quad x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$,

$$x_4 = \sqrt[3]{6}, \quad x_{5,6} = -\frac{\sqrt[3]{6}(1 \pm i\sqrt{3})}{2}.$$

220. Разлагая на множители, находим:

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 76x + 30x - 120 = 0,$$
$$x^3(x - 4) - 19x(x - 4) + 30(x - 4) = 0,$$
$$(x - 4)(x^3 - 19x + 30) = 0,$$
$$(x - 4)(x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x - 10x + 30) = 0,$$
$$(x - 4)(x - 3)(x^2 + 3x - 10) = 0,$$

откуда

$$x - 4 = 0;\ x - 3 = 0;$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0.$$

**Ответ.** $x_1 = 4,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2,\ x_4 = -5.$

**221. Ответ.** $x_1 = 1,\ x_2 = 2$

$$x_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{3},\quad x_{5,6} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

**222.** Обозначим:

$$a - x = z + n,$$

$$b - x = z - n,$$

отсюда

$$x = \frac{a+b}{2} - z = m - z, \tag{1}$$

где

$$m = \frac{a+b}{2};\quad n = \frac{a-b}{2};\quad a = m + n,\ b = m - n.$$

Заданное уравнение принимает вид:

$$\frac{(z+n)^4 + (z-n)^4}{4z^2} = \frac{(m+n)^4 + (m-n)^4}{4m^2},$$

т. е.

$$m^2z^4 - (m^4 + n^4)\,z^2 + n^4m^2 = 0,$$

откуда

$$z^2 = \frac{m^4 + n^4 \pm (m^4 - n^4)}{2m^2};$$

$$z^2 = m^2,\quad z_{1,2} = \pm m = \pm\frac{a+b}{2};$$

$$z^2 = \frac{n^4}{m^2},\qquad z_{3,4} = \pm\frac{n^2}{m} = \pm\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}.$$

Подставляя четыре значения $z$ в соотношение (1), находим корни заданного уравнения.

**Ответ.** $x_1 = a + b,\ x_2 = 0,$

$$x_3 = \frac{2ab}{a+b},\qquad x_4 = \frac{a^2 + b^2}{a+b}.$$

**223.** Если алгебраическое уравнение имеет корень $x_1 = i$, то оно имеет и корень $x_2 = -i$. Данное уравнение преобразуем так:

$$(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2) = 0.$$

**Ответ.** $x_{1,\,2} = \pm i$; $x_{3,\,4} = 1 \pm i$.

**224.** В заданном уравнении сумма коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме коэффициентов, стоящих на нечетных местах; уравнение имеет корень $x = -1$.

При делении левой части уравнения на $x + 1$ находим:

$$2x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 6x + 5 = 0.$$

Разлагая на множители, получим

$$(2x^2 + x + 5)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Каждый из этих трехчленов не имеет вещественных корней, следовательно, заданное уравнение имеет единственный вещественный корень $x = -1$.

**Ответ.** $x = -1$

**225.** По условию $x_1 = 5i$ есть корень заданного уравнения; поэтому

$$(5i)^5 + 25(5i)^3 - 8(5i)^2 + k = 0,$$

откуда

$$k = -200.$$

Но если уравнение имеет корень $5i$, то оно имеет корень и ему сопряженный, поэтому многочлен

$$x^5 + 25x^3 - 8x^2 - 200$$

делится без остатка на выражение

$$(x - 5i)(x + 5i) = x^2 + 25,$$

т. е.

$$x^5 + 25x^3 - 8x^2 - 200 = (x^2 + 25)(x^3 - 8) = 0.$$

Следовательно,

$$x^2 + 25 = 0,$$

или

$$x^3 - 8 = 0.$$

**Ответ.** $x_1 = 2$, $x_{2,\,3} = -1 \pm \sqrt{3}i$; $x_{4,\,5} = \pm 5i$.

**226.** Указание. Разложить трехчлен $ax^4 + bx^2 + c$ на множители и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в правой и левой частях равенства

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

**227.** Воспользуемся тем, что корни биквадратного уравнения попарно равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, т. е.

$$x_1 = -x_2,\ x_3 = -x_4.$$

Отсюда вытекает, что

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0;$$

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0;$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2\left(x_1^4 + x_3^4\right).$$

Но

$$x_1^4 + x_3^4 = \left(x_1^2 + x_3^2\right)^2 - 2x_1^2x_3^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2},$$

следовательно,

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = \frac{2\left(b^2 - 2ac\right)}{a^2}.$$

**Ответ.** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -\frac{2b}{a},$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0,$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = \frac{2\left(b^2 - 2ac\right)}{a^2},$$

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0.$$

**228.** 1. Биквадратное уравнение с вещественными коэффициентами имеет четыре корня: $\pm\sqrt{5}$ и $\pm 3i$.

Следовательно

$$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x - 3i)(x - 3i) = 0,$$

$$x^4 + 4x^2 - 45 = 0.$$

2. Воспользоваться формулами задачи № 226.

**Ответ.** $x^4 - 42x^2 + 841 = 0.$

**229.** Биквадратное уравнение имеет две пары корней, равных по абсолютной величине и противоположных по знаку. Допустим, что все корни уравнения вещественные. Расположим их в порядке возрастания:

$$-x_1;\ -x_2;\ x_2;\ x_1.$$

По условию корни заданного уравнения составляют арифметическую прогрессию:

$$x_2 - (-x_2) = x_1 - x_2,$$

т. е. $3x_2 = x_1$, $9x_2^2 = x_1^2$.

Кроме того,

$$x_1^2 + x_2^2 = -p,$$

$$x_1^2x_2^2 = q,$$

откуда

$$\frac{q}{p^2} = \frac{9}{100}.$$

**Ответ.** $q = 0{,}09p^2$.

**230.** 1. Можно воспользоваться результатом решения предыдущей задачи и сразу получить ответ.

2. Обозначим корни заданного уравнения: $x_{1,\,2} = \pm\sqrt{z_1}$ и $x_{3,\,4} = \pm\sqrt{z_2}$. Допустим, что $z_1 > z_2$. Арифметическую прогрессию запишем так:

$$-\sqrt{z_1};\ -\sqrt{z_2};\ \sqrt{z_2};\ \sqrt{z_1}.$$

Если воспользоваться свойством арифметической прогрессии, то получим следующее соотношение:

$$\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1} = -2\sqrt{z_2},$$

откуда

$$3\sqrt{z_2} = \sqrt{z_1};\ 9z_2 = z_1$$

Используя формулы Виета и найденное равенство, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 3k + 2, \\ z_1 \cdot z_2 = k^2, \\ z_1 = 9z_2. \end{cases}$$

**Ответ.** $k_1 = 6;\ k_2 = -\frac{6}{19}$.

**231.** Обозначим корни заданного уравнения $x_1$, $x_2$ и $x_3$. Имеем:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$

$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим искомые зависимости.

**232.** У к а з а н и е. Воспользоваться формулами предыдущей задачи:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a_1. \tag{1}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b, \tag{2}$$

$$x_1x_2x_3 = -c. \tag{3}$$

1. Если корни заданного уравнения составляют арифметическую прогрессию, то

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}. \tag{4}$$

Из соотношений (1), (2), (3) и (4) находим:

$$x_1 = \frac{-a^2 + \sqrt{a^4 - 27ac}}{3a},$$

$$x_2 = -\frac{a}{3},$$

$$x_3 = \frac{-a^2 - \sqrt{a^4 - 27ac}}{3a}.$$

2. Если корни заданного уравнения составляют геометрическую прогрессию, то

$$x_2 = \sqrt{x_1 x_3}. \tag{5}$$

Из соотношений (1), (2), (3) и (5) находим:

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt[3]{c} - \sqrt{a^2 - 2a\sqrt[3]{c} - 3\sqrt[3]{c^2}}}{2},$$

$$x_2 = -\sqrt[3]{c},$$

$$x_3 = \frac{-a + \sqrt[3]{c} + \sqrt{a^2 - 2a\sqrt[3]{c} - 3\sqrt[3]{c^2}}}{2}.$$

233. $x_{1,\,2} = \pm (a + b)$; $x_{3,\,4} = \pm (a - b)$,
$x_{5,\,6} = \pm (a + b)\,i$; $x_{7,\,8} = \pm (a - b)\,i$.

234. Имеем:

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = (x^2 + 1)(x + 1)^2 + 2x^2.$$

Сумма неотрицательных величин равна нулю при условии $(x + 1)^2 = 0$ и $x^2 = 0$, так как $x^2 + 1 \neq 0$, т. е. $x + 1 = 0$ и $x = 0$ одновременно, что невозможно.

Поэтому заданное уравнение вещественных корней не имеет.

235. Допустим, что $x \leqslant y$. Если в данном уравнении $y$ заменить значением $x$, то получим неравенство:

$$\frac{3}{x^2} \geqslant 1,$$

или

$$x^2 \leqslant 3.$$

Кроме того,

$$x^2 > 1,$$

следовательно,

$$1 < x \leqslant \sqrt{3},$$

что и требовалось доказать.

**238.** Указание. Пусть $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$. Полагая значения $x$ равными $a$, $b$, $c$ и подставляя в заданное уравнение, получим тождество.

Можно ли обобщить это положение для уравнений $n$-й степени? Для отрицательных корней уравнения?

**240.** Если $x > 0$, то с возрастанием $x$ левая часть выражения возрастает; при $x = 1{,}5$ это значение отрицательное, при $x = 1{,}6$ оно положительное, следовательно, корень данного уравнения находится внутри промежутка (1,5; 1,6).

Обозначим искомый корень из этого промежутка

$$x_1 = \frac{p}{q},$$

где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Подставляя значение корня в уравнение, перепишем его так:

$$p^5 + pq^4 = 10q^5.$$

Из последнего соотношения следует, что 10 должно делиться на $p$, т. е. числитель дроби $p$ может принимать одно из значений: 1, 2, 5, 10. Если рассмотреть дроби, у которых числителем будет одно из чисел 1, 2, 5 или 10, то при любом $q$ среди них нет такой, которая бы удовлетворяла неравенству

$$1{,}5 < \frac{p}{q} < 1{,}6.$$

Но если нет рационального числа, то корнем данного уравнения может быть только число иррациональное.

**241.** Имеем:

$$2x^n - (x^n + nax^{n-1} + \cdots + a^n) = 0,$$

$$2x^n - (x + a)^n = 0, \quad 2 - \left(1 + \frac{a}{x}\right)^n = 0,$$

откуда $x = \dfrac{a}{\sqrt[n]{2} - 1}$.

**Ответ.** $x = \dfrac{a}{\sqrt[n]{2} - 1}$.

**242.** Указание. $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{x}{x+1}\right)} = 110.$

**Ответ.** $x = 10$.

**243.** Подставив вместо $x$ последовательно числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . ., убеждаемся, что при $x = 1$, $y = \pm 1$ и при $x = 3$, $y = \pm 3$ числа 2, 4, 5, 6 . . . не удовлетворяют условию задачи. Легко доказать, что при $x \geqslant 4$ данное уравнение решений не имеет. В самом деле, сумма

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \cdots + x!$$

при $x \geqslant 4$ оканчивается цифрой 3, но квадрат целого числа не может оканчиваться цифрой 3 (см. таблицу квадратов целых чисел), поэтому других решений уравнение не имеет.

**244.** Обозначим $y = px$; тогда

$$(x^p)^x = (px)^x,$$

т. е.

$$x^{p-1} = p.$$

Следовательно,

$$x = p^{\frac{1}{p-1}}, \quad y = p^{\frac{p}{p-1}}.$$

Заменяя $\frac{1}{p-1} = k$, находим

**Ответ.** $x = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$, $y = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}$,

где $k$ — любое целое число (кроме 0 и $-1$).

## § 5. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**245.** Разложить подкоренные выражения на множители и вынести общий множитель за скобки, т. е.

$$\sqrt{x+1}\,(\sqrt{4x+5} - \sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1}) = 0.$$

Приравнивая первый множитель нулю и решая уравнение

$$\sqrt{x+1} = 0,$$

находим

$$x_1 = -1.$$

Приравнивая второй множитель нулю и решая уравнение

$$\sqrt{4x+5} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1},$$

после освобождения от радикалов находим:

$$7x^2 - 26x - 45 = 0,$$

откуда $x_2 = 5$ $\left(x_3 = -\frac{9}{7}\right.$ посторонний корень$\left.\right)$.

**Ответ.** $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.

**246.** Обозначим $x^2 + 5x + 28 = z^2$; тогда заданное уравнение принимает вид: $z^2 - 5z - 24 = 0$,
откуда

$$z_1 = 8 \quad (z_2 = -3)$$

Следовательно,

$$x^2 + 5x - 36 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 4,\ x_2 = -9.$$

**Ответ.** $x_1 = 4,\ x_2 = -9.$

247. Указание. Обозначая $3x^2 + 5x + 8 = z$, имеем:

$$\sqrt{z} - \sqrt{z-7} = 1.$$

**Ответ.** $x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{8}{3}.$

248. Уничтожив иррациональность в знаменателе, находим:

$$\frac{21 + \sqrt{441 - x^2}}{x} = \frac{21}{x},$$

откуда $\sqrt{441 - x^2} = 0.$

**Ответ.** $x_{1,\,2} = \pm 21.$

249. Обозначим $2x - 5 = z^2$; тогда заданное уравнение принимает вид:

$$\sqrt{z^2 + 2z + 1} + \sqrt{z^2 + 6z + 9} = 14,$$

откуда $z = 5;\ x = 15.$

**Ответ.** $x = 15.$

250. После упрощения получим квадратное уравнение

$$x^2 + 31x - 222 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 6;\ x_2 = -37.$$

**Ответ.** $x_1 = 6;\ x_2 = -37.$

251. $x = 2.$

252. Имеем:

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} - \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)^2 = 0,$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}}\left(\sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}}\right) = 0,$$

откуда $\sqrt{\frac{x-1}{x}} = 0;\ x_1 = 1,$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} - 1 = 0.$$

После элементарных преобразований находим:

$$(x^2 - x) - 2\sqrt{x^2 - x} + 1 = 0,$$

$$(\sqrt{x^2 - x} - 1)^2 = 0,$$

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

откуда

$$x_{2,\,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

**Ответ.** $x_1 = 1$. $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

**253.** Имеем:

$$\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} = x^2 - \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}},$$

$$(x^4 - 12) - 2x\sqrt{x^4 - 12} + x^2 = 0,$$

$$(\sqrt{x^4 - 12} - x)^2 = 0,$$

$$\sqrt{x^4 - 12} = x,$$

$$x^4 - x^2 - 12 = 0.$$

Решая это биквадратное уравнение, находим два вещественных и два мнимых корня.

**Ответ.** $x = \pm 2$.

**254.** Указание. Обозначить

$$x^2 - 3x + 7 = z^2.$$

**Ответ.** $x_1 = -3$, $x_2 = 6$, $x_{3,\,4} = \frac{3(1 \pm \sqrt{5})}{2}$.

**255.** $$\frac{\sqrt{(a + x)(b + x)}\,(\sqrt{x + a} + \sqrt{x + b})}{\sqrt{x + a} + \sqrt{x + b}} = \sqrt{ab},$$

$$\sqrt{(x + b)(x + a)} = \sqrt{ab},$$

$$x^2 + (a + b)x = 0,$$

откуда

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -(a + b)$$

**Ответ.** $x_1 = 0$ $(a > 0;\ b > 0)$; $x_2 = -(a + b)$ $(a < 0;\ b < 0)$.

**256.** Имеем:

$$\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x + 2} = -\sqrt[3]{x + 3}.$$

Применяя формулу

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b),$$

находим:

$$x+1+x+2+3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)}\times$$
$$\times\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}\right)=-(x+3),$$
$$\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)}=x+2,$$

т. е.

$$(x+1)(x+2)(x+3)=(x+2)^3,$$

откуда

$$x=-2.$$

**Ответ.** $x=-2$.

257. Указание. Обозначим $\sqrt[3]{x}=z$; тогда уравнение принимает вид:

$$2z^2-5z-3=0,$$

откуда

$$z_1=3;\quad z_2=-\frac{1}{2}.$$

**Ответ.** $x_1=27;\quad x_2=-\frac{1}{8}$.

258. Обозначим $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}=z$; тогда заданное уравнение принимает вид:

$$z+\frac{1}{z}=\frac{13}{6},$$

т. е.

$$6z^2-13z+6=0,$$

$$z_1=\frac{2}{3},\qquad z_2=\frac{3}{2};$$

поэтому $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}=\frac{2}{3}$ и $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}=\frac{3}{2}$.

Освобождаясь от радикалов, получаем два уравнения первой степени:

$$\frac{x+3}{5x+2}=\frac{8}{27}\quad\text{и}\quad\frac{x+3}{5x+2}=\frac{27}{8}.$$

Решая их, находим

**Ответ.** $x_1=5;\quad x_2=-\frac{30}{127}$.

259. Обозначим $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}=z$; тогда $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{z}$ и заданное

уравнение после сокращения правой части на $(1+a)$, принимает вид:

$$\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{z}+z=2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{4}},$$

или

$$z^2-2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot z+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{2}}=0,$$

откуда

$$z=\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Заменяя $z$ его значением, находим уравнение:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{4}},$$

или

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-a}{1+a},$$

откуда и находим корень заданного уравнения: $x=-a$.

**Ответ.** $x=-a$.

**260.** Освобождаясь от иррациональности в знаменателе, имеем:

$$\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{1}{8}\sqrt[3]{15^2x},$$

или

$$1-x^2=\left(1-\frac{1}{8}\sqrt[3]{15^2x^4}\right)^2.$$

Введем новую переменную $x^2=z^3$; тогда

$$1-z^3=\left(1-\frac{z^2}{8}\sqrt[3]{15^2}\right)^2,$$

т. е.

$$15\sqrt[3]{15}\cdot z^4+64z^3-16\sqrt[3]{15^2}\cdot z^2=0.$$

Разлагая на множители, находим:

1) $z^2=0$, т. е. $z=0$, поэтому и $x_1=0$;

2) $15\sqrt[3]{15}\cdot z^2+64z-16\sqrt[3]{15^2}=0$,

откуда

$$z_{3,4} = \frac{-32 \pm 68}{15\sqrt[3]{15}},$$

т. е.

$$z_3 = \frac{12}{5\sqrt[3]{15}}.$$

Отбрасывая отрицательное значение $z_4$, так как $x^2 = z^3 \geqslant 0$, имеем:

$$x^2 = \frac{12^3}{5^3 \cdot 15} = \frac{24^2}{25^2},$$

откуда

$$x_{2,3} = \pm \frac{24}{25}.$$

**Ответ.** $x_1 = 0;\ x_{2,3} = \pm \frac{24}{25}$.

**261.** $x_{1,2} = \pm 3$.

**262.** Обозначая сопряженное выражение левой части заданного уравнения через $z$, получим два равенства:

$$\begin{cases} \sqrt{4x+2} - \sqrt{4x-2} = z \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{4x-2} = 4. \end{cases}$$

Почленно умножая и складывая их, находим:

$$4x + 2 - (4x - 2) = 4z;\ z = 1.$$

$$2\sqrt{4x+2} = 5;\quad x = \frac{17}{16}.$$

**Ответ.** $x = 1\frac{1}{16}$.

**263.** $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 5$.

**264.** $x = \frac{3}{4}$.

**265.** $x_1 = 0,\ x_2 = 1$.

**266.** $x_{1,2} = \pm a$.

**267.** $x_{1,2} = \pm 1$.

**268.** Указание. Умножая числитель и знаменатель дроби на квадрат знаменателя, после упрощения находим:

$$\frac{(a-b)^2}{\left(\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{x-b}\right)^3} = a - b$$

или

$$a - x + x - b + 3\sqrt[3]{(a-x)(x-b)(a-b)} = a - b,$$

т. е.

$$3\cdot\sqrt[3]{a-b}\cdot\sqrt[3]{(a-x)(x-b)}=0.$$

**Ответ.** $x_1=a$, $x_2=b$.

**269.** $x_1=64$; $x_2=-27$.

**270.** Обозначая $a-x=t^4$, $b-x=z^4$, находим:

$$a+b-2x=t^4+z^4.$$

Заданное уравнение перепишем так:

$$t+z=\sqrt[4]{t^4+z^4},$$

откуда, после преобразования, получим:

$$tz\,(2t^2+3tz+2z^2)=0.$$

Следовательно, или

$$t=0,\text{ тогда } x_1=a,$$

или

$$z=0,\text{ тогда } x_2=b,$$

или

$$2t^2+3tz+2z^2=0.$$

Последнее равенство преобразуем к виду

$$2\,(t^2+z^2)=-3tz,\ldots$$

или

$$4\,(t^4+z^4)=t^2z^2,$$

т. е.

$$4\,(a+b-2x)=\sqrt{(a-x)(b-x)},$$

откуда находим $x_3$ и $x_4$ — оба корня комплексные.

**Ответ.** Если $a\geqslant b$, то $x=b$;
если $b\geqslant a$, то $x=a$.

**271.** Указание. $\sqrt[5]{a+x}\left(\sqrt[5]{b}+\sqrt[5]{a}\right)=\sqrt[5]{x}$,

или

$$(a+x)\left(\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}\right)^5=x.$$

**Ответ.** $x=\dfrac{a\left(\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}\right)^5}{1-\left(\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}\right)^5}$.

**272.** Преобразуем левую часть уравнения:

$$x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\ldots=x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots=x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\cdots}$$

Здесь показатель степени $x$ есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

следовательно, имеем уравнение $x^2 = 4$, откуда $x_1 = 2$.

Значение $x_2 = -2$ уравнению не удовлетворяет.

**Ответ.** $x = 2$.

**273.** $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm\sqrt{ab}$.

**274.** Умножая обе части уравнения на

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x},$$

получим:

$$a + x + a - x = \sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x}\right),$$

т. е.

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \frac{2a}{\sqrt[3]{a^2}} = 2\sqrt[3]{a}$$

$$2a + 3\sqrt[3]{a^2-x^2}\left(\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x}\right) = 8a,$$

$$3\sqrt[3]{a^2-x^2}\cdot 2\sqrt[3]{a} = 6a,$$

$$a^2 - x^2 = a^2;$$

$$x = 0.$$

**Ответ.** $x_1 = 0$.

**275.** У к а з а н и е. Обозначить

$$\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}} = z.$$

**Ответ.** $x_1 = \frac{a-b}{2}$.

**276.** Преобразуем левую часть уравнения. Вынесем за знак радикала в первом слагаемом $x^{\frac{n}{n+1}}$ и во втором $a^{\frac{n}{n+1}}$, получим:

$$x^{\frac{n}{n+1}}\sqrt[n]{x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}} + a^{\frac{n}{n+1}}\sqrt[n]{a^{\frac{n}{n+1}} + x^{\frac{n}{n+1}}} = b,$$

или

$$\left(x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}} = b,$$

откуда $$x^{\frac{n}{n+1}} = b^{\frac{n}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}}.$$

**Ответ.** $x = \left(b^{\frac{n}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$

**277.** Преобразуем данное уравнение к виду

$$\sqrt[n]{a+x}\left(\frac{x+a}{ax}\right) = \frac{\sqrt[n]{x}}{b},$$

или

$$\sqrt[n]{\frac{a+x}{x}} \cdot \frac{x+a}{x} = \frac{a}{b},$$

$$\left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{1}{n}+1} = \frac{a}{b},$$

т. е.

$$\left(\frac{a+x}{x}\right)^{n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}.$$

**Ответ.** $x = \dfrac{a}{\sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}} - 1}.$

**278.** $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

## § 6. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

**279.** Приводим заданную систему к виду:

$$\begin{cases} (x+y) + xy = 11 \\ (x+y)\,xy = 30. \end{cases}$$

Обозначим

$$\begin{cases} x + y = u \\ xy = v. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{cases} u + v = 11 \\ uv = 30, \end{cases}$$

откуда $u_1 = 6$, $v_1 = 5$, $u_2 = 5$, $v_2 = 6$,

т. е.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6. \end{cases}$$

**Ответ.** $x_1 = 5$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = 5$; $x_3 = 3$, $y_3 = 2$; $x_4 = 2$, $y_4 = 3$.

280. $x_1 = 1$, $y_1 = 3$. $x_2 = 3$, $y_2 = 1$;

$$x_{3,4} = \frac{-5 \pm i\sqrt{23}}{2}; \quad y_{3,4} = \frac{-5 \mp i\sqrt{23}}{2}.$$

281. $x_{1,2} = \pm \frac{3}{2}$; $y_{1,2} = \pm \frac{1}{3}$;

$$x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}; \quad y_{3,4} = \pm 1.$$

282. Обозначим

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ -xy = v. \end{cases}$$

Заданная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} u + v = -11 \\ uv = -180, \end{cases}$$

откуда

$$u_1 = 9, \ v_1 = -20;$$
$$u_2 = -20, \ v_2 = 9,$$

т. е.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ xy = 20, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -20 \\ xy = -9. \end{cases}$$

Решая эти две системы уравнений, получим два биквадратных уравнения.

**Ответ.** $x_{1,2} = \pm 5$, $y_{1,2} = \pm 4$;
$x_{3,4} = \pm 4i$, $y_{3,4} = \mp 5i$;
$x_{5,6} \approx \pm 1{,}86$, $y_{5,6} \approx \mp 4{,}85$;
$x_{7,8} \approx \pm 4{,}85i$, $y_{7,8} \approx \mp 1{,}86i$.

283. Если в первом уравнении заменить значение $y$ его значением из второго уравнения, то получим квадратное уравнение, имеющее два равных корня тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю, т. е.

$$(8m - 6m^2)^2 - 4(1 + m^2)(9m^2 - 24m - 9) = 0,$$

откуда $m = -0{,}75$.

**Ответ.** $m = -0{,}75$

284. $x_1 = 1$, $y_1 = 4$; $x_2 = 4$, $y_2 = 1$;

$$x_{3,4} = \frac{-7 \pm i\sqrt{15}}{2}, \quad y_{3,4} = \frac{-7 \mp i\sqrt{15}}{2}.$$

285. $x_{1,2} = \pm 3$, $y_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \pm 12$, $y_{3,4} = \mp \frac{7}{2}$.

286. Указание. Обозначить

$$x(x + 1) = u,$$
$$3x^2 + 5y = v;$$

тогда заданная система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} uv = 144, \\ u + v = 24. \end{cases}$$

**287.** У к а з а н и е. Умножить первое уравнение на 3 и сложить его со вторым уравнением.

**Ответ.** Вещественные корни системы уравнений

$$x_1 = 2,\ y_1 = 3;\ x_2 = 3,\ y_2 = 2.$$

**288.** Разлагая на множители каждое уравнение, получим:

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 19) = 0 \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 7) = 0. \end{cases}$$

Если $x - y = 0$, то $y = x$.
Если $x + y = 0$, то $y = -x$.
Кроме того,

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases} \tag{1}$$

Если $y = x$, то из второго уравнения системы находим:

$$2x^3 - 14x = 0;$$

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,$$

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{7},\quad y_{2,3} = \pm\sqrt{7}.$$

Если $y = -x$, то из первого уравнения системы находим:

$$2x^3 - 38x = 0,$$

$$x_{4,5} = \pm\sqrt{19},\quad y_{4,5} = \mp\sqrt{19}.$$

Из соотношений (1) получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6, \end{cases}$$

решая которую, определим остальные четыре корня заданной системы.

**Ответ.** $x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_{2,3} = y_{2,3} = \pm\sqrt{7},$

$$x_{4,5} = \pm\sqrt{19}\quad y_{4,5} = \mp\sqrt{19},$$
$$x_{6,7} = \pm 3,\quad y_{6,7} = \pm 2,$$
$$x_{8,9} = \pm 2,\quad y_{8,9} = \pm 3.$$

**289.** У к а з а н и е. Преобразовать оба уравнения системы так:

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{x} + 2\right)\left(y + \frac{1}{y} + 2\right) = 27 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 10. \end{cases}$$

Обозначить $x+\frac{1}{x}=u$, $y+\frac{1}{y}=v$

Заданная система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases}(u+2)(v+2)=27\\ uv=10.\end{cases}$$

**Ответ.** $x_{1,2}=2$, $y_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$;

$$x_{3,4}=\frac{1}{2},\quad y_{3,4}=2\pm\sqrt{3};$$

$$x_{5,6}=2\pm\sqrt{3},\quad y_{5,6}=2;$$

$$x_{7,8}=2\pm\sqrt{3},\quad y_{7,8}=\frac{1}{2}.$$

**290.** $x_{1,2}=7+4\sqrt{3}$, $y_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$;
$x_{3,4}=2\pm\sqrt{3}$, $y_{3,4}=7+4\sqrt{3}$;
$x_{5,6}=7-4\sqrt{3}$, $y_{5,6}=2\pm\sqrt{3}$;
$x_{7,8}=2\pm\sqrt{3}$, $y_{7,8}=7-4\sqrt{3}$.

**291.** Указание. Преобразовать систему уравнений к виду:

$$\begin{cases}x^2+y^2=8\\ x^2y^2=16.\end{cases}$$

**Ответ.** $x_{1,2}=\pm 2$, $y_{1,2}=\pm 2$.

**292.** $x_1=-9$, $y_1=-11$; $x_2=11$, $y_2=9$.
**293.** $x_1=14$, $y_1=-11$; $x_2=11$, $y_2=-14$.
**294.** Преобразуем первое уравнение так:

$$(x^2+y^2)^2-x^2y^2=481,$$

или

$$(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)=481.$$

Принимая во внимание уравнение второе, находим систему:

$$\begin{cases}x^2+y^2-xy=13\\ x^2+y^2+xy=37,\end{cases}$$

откуда $xy=12$, что со вторым уравнением дает

$$(x+y)^2=49 \qquad (1)$$

Вычитая из второго уравнения $3xy=36$, получим:

$$(x-y)^2=1. \qquad (2)$$

Заданную систему уравнений приводим к четырем линейным системам:

$$\begin{cases} x+y=\pm 7 \\ x-y=\pm 1 \end{cases}$$

Решая эти четыре системы уравнений, находим:

**Ответ.** $x_{1,\,2}=\pm 4$, $y_{1,\,2}=\pm 3$; $x_{3,\,4}=\pm 3$, $y_{3,\,4}=\pm 4$.

295. Обозначим $z=x-y$. Решая это уравнение совместно со вторым уравнением системы, находим:

$$x=\frac{a+z}{2},$$

$$y=\frac{a-z}{2}. \qquad (1)$$

Подставляя эти значения в первое уравнение системы, имеем:

$$(a+z)^4+(a-z)^4=16b^4,$$

и, после преобразования, получим биквадратное уравнение:

$$z^4+6a^2z^2+(a^4-8b^4)=0. \qquad (2)$$

Пусть $z^2=v$, тогда

$$v^2+6a^2v+(a^4-8b^4)=0. \qquad (3)$$

Если свободный член этого уравнения $a^4-8b^4>0$, то заданная система вещественных корней не имеет.

Если $a^4-8b^4<0$, то уравнение (3) имеет один положительный корень

$$v_1=-3a^2+\sqrt{8\,(a^4+b^4)},$$

следовательно, $z_1=\sqrt{v_1}$, $z_2=-\sqrt{v_1}$.

Подставляя эти значения в уравнения (1), находим вещественные корни заданной системы уравнений.

**Ответ.** $x_1=\dfrac{a+\sqrt{v_1}}{2}$, $y_1=\dfrac{a-\sqrt{v_1}}{2}$;

$$x_2=\frac{a-\sqrt{v_1}}{2},\quad y_2=\frac{a+\sqrt{v_1}}{2}.$$

296. Решение аналогично предыдущему.

**Ответ.** $x_1=0$, $y_1=a$; $x_2=a$, $y_2=0$;

$$x_{3,\,4}=\frac{(1\pm i\sqrt{3})\,a}{2},\quad y_{3,\,4}=\frac{(1\mp i\sqrt{3})\,a}{2}.$$

297. $x_{1,2}=\frac{b}{2}\pm A,\ y_{1,2}=\frac{b}{2}\mp A;$

$$x_{3,4}=\frac{b}{2}\pm B,\ y_{3,4}=\frac{b}{2}\mp B,$$

где

$$A=\sqrt{-\frac{b^2}{4}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4+\frac{4a^5}{b}}};$$

$$B=\sqrt{-\frac{b^2}{4}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{b^4+\frac{4a^5}{b}}}.$$

298. Указание. Преобразовав систему уравнений к виду

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{xy}+7 \\ (x+y)\sqrt{xy}=78, \end{cases}$$

находим

$$xy=36,\ x+y=13;$$
$$xy=169,\ x+y=-6.$$

**Ответ.** $x_1=4,\ y_1=9;\ x_2=9,\ y_2=4.$

299. Указание. Возведя первое уравнение в куб и используя данные задачи, получим:

$$x+y+3\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)=4^3,$$

или

$$x+y+3\sqrt[3]{27}\cdot 4=4^3,$$

т. е.

$$\begin{cases} x+y=28; \\ xy=27. \end{cases}$$

**Ответ.** $x_1=27,\ y_1=1;\ x_2=1,\ y_2=27.$

300. Указание. Обозначим $\sqrt{\frac{x+y}{5x}}=t$; первое уравнение перепишем так:

$$t+\frac{1}{t}=\frac{34}{15},$$

или

$$15t^2-34t+15=0,$$

откуда

$$t_1=\frac{3}{5},\quad t_2=\frac{5}{3}.$$

Поэтому

$$\frac{x+y}{5x}=\frac{9}{25};\quad y=\frac{4}{5}x;\qquad \frac{x+y}{5x}=\frac{25}{9};\quad y=\frac{116}{9}x.$$

Подставляя найденные значения $y$-ов во второе уравнение, получим два квадратных уравнения.

**Ответ.** $x_1=5,\ y_1=4;\ x_2=-\frac{29}{4},\ y_2=-\frac{29}{5};$

$$x_{3,4}=\frac{-125\pm\sqrt{136729}}{232};\quad y_{3,4}=\frac{-125\pm\sqrt{136729}}{18}.$$

**301.** $x_1=5,\ y_1=7.$

**302.** Указание. См. № 300.

**Ответ.** $x_1=6,\ y_1=3;\ x_2=-3,\ y_2=-\frac{3}{2};$

$$x_{3,4}=\frac{12\pm3\sqrt{39}}{23},\quad y_{3,4}=12\mp3\sqrt{39}$$

**303.** Указание. Обозначить $\sqrt[6]{xy}=z$; тогда первое уравнение преобразуется к виду:

$$3z^3-7z^2+4=0,$$

$$(z-1)(3z^2-4z-4)=0,$$

откуда

$$z_1=1,\quad z_2=2,\quad z_3=-\frac{2}{3}.$$

**Ответ.** $x_{1,2}=10\pm3\sqrt{11},\ y_{1,2}=10\mp3\sqrt{11};$

$$x_3=16,\ y_3=4;\ x_4=4,\ y_4=16;$$

$$x_{5,6}=10\pm\frac{2\sqrt{18209}}{27};\quad y_{5,6}=10\mp\frac{2\sqrt{18209}}{27}.$$

**304.** Указание. Использовать свойство производных пропорций; первое уравнение преобразовать к виду

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{25}{7};\quad \frac{x^2}{y^2}=\frac{16}{9};\quad y=\pm\frac{3}{4}x.$$

Решить системы уравнений:

$$\begin{cases}x^3+2y^3=118;\\ y=\frac{3}{4}x;\end{cases}\qquad \begin{cases}x^3+2y^3=118;\\ y=-\frac{3}{4}x.\end{cases}$$

**Ответ.** $x_1=4,\ y_1=3;$

$$x_2=4\sqrt[3]{\frac{59}{5}},\quad y_2=-3\sqrt[3]{\frac{59}{5}}.$$

305. Пусть $3x = 2y = z = 6k$; тогда $x = 2k$, $y = 3k$, $z = 6k$. Подставляя значения $x$, $y$ и $z$, выраженные через $k$, во второе уравнение, имеем:

$$49k^2 = 196,$$

откуда

$$k_{1,\,2} = \pm 2.$$

**Ответ.** $x_{1,\,2} = \pm 4$, $y_{1,\,2} = \pm 6$, $z_{1,\,2} = \pm 12$.

306. Указание. Последние два уравнения записать так:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k.$$

**Ответ.** $x_{1,\,2} = \pm 3$, $y_{1,\,2} = \pm 4$, $z_{1,\,2} = \pm 5$.

307. Указание. Из уравнений второго и третьего находим:

$$xyz = 27. \qquad (1)$$

Умножая третье уравнение на $z$ и заменяя $xyz$ из равенства (1), а $x + y = 9 - z$ из первого уравнения, после преобразования находим, что $(z - 3)^3 = 0$, откуда $z = 3$; легко найти что $x = y = z$.

**Ответ.** $x = y = z = 3$.

308. Преобразуем второе уравнение; принимая во внимание третье уравнение, находим:

$$xz + xy + yz = \frac{13}{3},$$

или

$$x(y + z) + yz = \frac{13}{3}.$$

Но

$$y + z = \frac{13}{3} - x; \quad yz = \frac{1}{x},$$

следовательно,

$$x\left(\frac{13}{x} - x\right) + \frac{1}{x} = \frac{13}{3},$$

т. е.

$$(x - 1)\left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right) = 0,$$

откуда

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = \frac{1}{3}.$$

Если $x_1 = 1$, то $y + z = \frac{10}{3}$, $yz = 1$,

откуда $y = 3$, $z = \frac{1}{3}$ или $y = \frac{1}{3}$, $z = 3$ и т. д.

**Ответ.** $x_1 = 1$, $y_1 = 3$, $z_1 = \frac{1}{3}$;

$x_2 = 1$, $y_2 = \frac{1}{3}$, $z_2 = 3$;

$x_3 = 3$, $y_3 = 1$, $z_3 = \frac{1}{3}$;

$x_4 = 3$, $y_4 = \frac{1}{3}$, $z_4 = 1$;

$x_5 = \frac{1}{3}$, $y_5 = 3$, $z_5 = 1$;

$x_6 = \frac{1}{3}$, $y_6 = 1$, $z_6 = 3$.

**309.** У к а з а н и е. Составляя производную пропорцию из первых трех отношений, находим:

$$\frac{x}{y+z} = \frac{x+y+z}{y+z+x+z+1+x+y-1},$$

или

$$\frac{x}{y+z} = \frac{1}{2},$$

т. е.

$$y + z = 2x.$$

Следовательно, $x + y + z = \frac{1}{2}$, поэтому $3x = \frac{1}{2}$.

**Ответ.** $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{6}$.

**310.** Складывая почленно все уравнения, находим

$$(x + y + z)^2 = a + b + c,$$

откуда

$$x + y + z = \pm \sqrt{a + b + c};$$

подставляя это соотношение в заданные уравнения, получим ответ:

$$x = \pm \frac{a}{k}, \quad y = \pm \frac{b}{k}, z = \pm \frac{c}{k},$$

где $k = \sqrt{a + b + c}$.

**311.** Указание. Обозначить

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=k;$$

тогда

$$x=\frac{k}{a},\quad y=\frac{k}{b},\quad z=\frac{k}{c}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a+b+c}{k}.$$

Из соотношений (1) и (2) находим:

$$k=\pm\sqrt{a+b+c}.$$

**Ответ.** $x=\pm\dfrac{\sqrt{a+b+c}}{a}$,

$$y=\pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{b},$$

$$z=\pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{c}.$$

**312.** Имеем:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b},$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c},$$

откуда $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$.

Поэтому

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right),$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

**Ответ.** $x=\dfrac{2abc}{bc+ac-ab}$,

$$y = \frac{2abc}{ab + bc - ac},$$

$$z = \frac{2abc}{ac + ab - bc}.$$

**313.** $x_1 = 5,\ y_1 = 1,\ z_1 = 3.$

**314.** $x_1 = y_1 = z_1 = 0,$

$$x_{2,3} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3},\quad y_{2,3} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3},\quad z_{2,3} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

**315.** Вычитая второе уравнение из первого, третье из второго, получим:

$$(y - z)(x + y + z) = 9,$$
$$(x - y)(x + y + z) = 9,$$

откуда

$$y - z = x - y;\ 2y = x + z,$$

следовательно,

$$(x - y)\,y = 3;\ x = \frac{3}{y} + y.$$

Если подставить значение $x = \frac{3}{y} + y$ в первое уравнение, то получим биквадратное уравнение

$$3y^4 - 28y^2 + 9 = 0,$$

откуда

$$y_{1,2} = \pm 3;\quad y_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и т. д.}$$

**Ответ.** $x_{1,2} = 4,\ y_{1,2} = \pm 3,\ z_{1,2} = \pm 2,$

$$x_{3,4} = \pm \frac{10\sqrt{3}}{3},\quad y_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},\quad z_{3,4} = \mp \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

**316.** Имеем:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = a^2 + b^2 + c^2,$$

т. е.

$$x + y + z = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{N}.$$

Разлагая левую часть каждого из уравнений как разность квадратов и заменяя сумму $x + y + z = \frac{1}{N}$ находим:

$$y + z - x = a^2N,$$
$$x + z - y = b^2N,$$
$$x + y - z = c^2N.$$

Решая систему линейных уравнений, определим неизвестные.

**Ответ.**

$$x = \pm \frac{b^2 + c^2}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$y = \pm \frac{a^2 + c^2}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$z = \pm \frac{a^2 + b^2}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**317.** Указание. Складывая почленно заданные уравнения, находим:

$$2(x + y + z)^2 = a + b + c,$$

откуда

$$x + y + z = \pm \sqrt{\frac{a + b + c}{2}}.$$

Складывая почленно второе и третье уравнения системы и вычитая первое, получим:

$$2x(x + y + z) = b + c - a,$$

откуда

$$x = \frac{b + c - a}{2(x + y + z)} = \pm \frac{b + c - a}{\sqrt{2(a + b + c)}}.$$

Аналогично находим и остальные неизвестные.

**Ответ.**

$$x = \pm \frac{b + c - a}{\sqrt{2(a + b + c)}},$$

$$y = \pm \frac{a + c - b}{\sqrt{2(a + b + c)}},$$

$$z = \pm \frac{a + b - c}{\sqrt{2(a + b + c)}}.$$

**318.** Указание. Складывая почленно заданные уравнения, находим:

$$xy + xz + yz = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Вычитая из последнего соотношения последовательно каждое из уравнений системы, получим:

$$yz = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2),$$

$$xz = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2),$$

$$xy = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2),$$

следовательно

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2}.$$

Два последних уравнения позволяют найти $x$ и $y$, а затем и $z$.

**Ответ.** $x = \pm \sqrt{\dfrac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)}{2(b^2 + c^2 - a^2)}}$,

$$y = \pm \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{2(a^2 + c^2 - b^2)}},$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{2(a^2 + b^2 - c^2)}}.$$

**319.** Указание. Преобразовать уравнения системы так:

$$\begin{cases} \dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{1}{x} + 5\cdot\dfrac{1}{y} - \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{3}, \\ 3\cdot\dfrac{1}{z} - 4\cdot\dfrac{1}{y} = 4, \\ \dfrac{1}{z} + 10\cdot\dfrac{1}{x} = 5. \end{cases}$$

Обозначить $\dfrac{1}{x} = u$, $\dfrac{1}{y} = v$, $\dfrac{1}{z} = t$.

Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 20u + 30v - 9t = 26 \\ 3t - 4v = 4 \\ t + 10u = 5. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений найти $u$, $v$ и $t$, а по ним $x$, $y$ и $z$.

**Ответ.** $x = 10$, $y = \dfrac{1}{2}$ $z = \dfrac{1}{4}$.

**320.** Указание. Имеем:

$$(x+y+z)^3 = 1,$$
$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) = 1,$$

поэтому

$$(x+y+z)^3 + 2(x^3+y^3+z^3) -$$
$$-3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) = 0,$$

откуда после элементарного преобразования находим:

$$xyz = 0.$$

Если $x = 0$, то $y_1 = 0$, $z_1 = 1$; $y_2 = 1$, $z_2 = 0$ и т. д.

**Ответ.** $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 1$;
$x_2 = 0$, $y_2 = 1$, $z_2 = 0$;
$x_3 = 1$, $y_3 = 0$, $z_3 = 0$.

**321.** Указание. Для решения предложенной системы уравнений можно воспользоваться свойством корней кубического уравнения:

$$u^3 - 9u^2 + 26u - 24 = 0.$$

Целые корни содержатся среди делителей свободного члена, это числа 2, 3 и 4.

**Ответ.** $x_{1,2} = 2$, $y_1 = 3$, $z_1 = 4$;
$y_2 = 4$, $z_2 = 3$;
$x_{3,4} = 3$, $y_3 = 2$, $z_3 = 4$;
$y_4 = 4$, $z_4 = 2$;
$x_{5,6} = 4$, $y_5 = 2$, $z_5 = 3$;
$y_6 = 3$, $z_6 = 2$.

**322.** Указание. Для упрощения системы уравнений ввести обозначения:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = u \\ x^2+z^2 = v \\ y^2+z^2 = t. \end{cases}$$

Система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} u+v+t = 28 \\ u^2+v^2+t^2 = 294 \\ \dfrac{uv}{t} = \dfrac{50}{13}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} u+v=28-t, \\ uv=\dfrac{50}{13}t, \end{cases}$$

$$(u+v)^2-2uv+t^2=294,$$

или

$$(28-t)^2-\frac{100}{13}t+t^2-294=0,$$

$$t_1=13\left(t_2=18\frac{11}{13}\right).$$

Зная значение $t$, находим $u$ и $v$, а отсюда и искомые неизвестные.

**Ответ.** $x_{1,2}=\pm 1$, $y_{1,2}=\pm 3$, $z_{1,2}=\pm 2$;
$x_{3,4}=\pm 1$, $y_{3,4}=\pm 2$, $z_{3,4}=\pm 3$.

**323.** Возвести первое уравнение в квадрат и вычесть второе уравнение:

$$xy+xz+yz=9. \qquad (\alpha)$$

Возвести третье уравнение в квадрат и вычесть первое уравнение:

$$\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}=5. \qquad (\beta)$$

Возвести уравнение ($\beta$) в квадрат и вычесть уравнение ($\alpha$):

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\sqrt{xyz}=8.$$

Учитывая третье уравнение системы, находим:

$$\sqrt{xyz}=2; \quad xyz=4.$$

Решая систему уравнений (см. № 321)

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+xz+yz=9 \\ xyz=4, \end{cases}$$

находим неизвестные.

**Ответ.** $x_1=1$, $y_1=1$, $z_1=4$;
$x_2=1$, $y_2=4$, $z_2=1$ и т. д.

**324.** Указание. Сложив и перемножив почленно уравнения, находим:

$$\sqrt[3]{xyz}=\frac{1}{9};$$

$$x+y+z=\frac{1}{2\sqrt[3]{3}}.$$

**Ответ.** $x=\dfrac{1}{9\sqrt[3]{3}}$; $y=\dfrac{1}{6\sqrt[3]{3}}$; $z=\dfrac{2}{9\sqrt[3]{3}}$.

325. Указание. Перемножив почленно уравнения, после преобразования получим:

$$\sqrt{xyz}\left(\sqrt[3]{xyz}-1\right)=0$$

**Ответ.** $x=3\frac{1}{3}$, $y=2\frac{2}{5}$, $z=\frac{1}{8}$.

326. Перемножим почленно два первых уравнения, получим:

$$\frac{(x+y)(z+t)}{xyzt}=\frac{7\cdot 5}{12\cdot 18};$$

воспользовавшись четвертым уравнением системы, находим

$$(x+y)(z+t)=105 \tag{1}$$

Принимая $(x+y)$ и $(z+t)$ за корни квадратного уравнения, по их сумме (третье уравнение системы) и произведению (1) составим уравнение

$$u^2-22u+105=0,$$

откуда

$$u_1=7,\ u_2=15.$$

Следовательно, или

$$x+y=7,\ z+t=15, \tag{2}$$

или

$$x+y=15,\ z+t=7. \tag{3}$$

Подставляя соотношение (2) в первые два уравнения, имеем:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z+t=15 \\ zt=54. \end{cases}$$

Решая эти системы уравнений, находим:

$$x_1=3,\ y_1=4,\ z_1=6,\ t_1=9;$$

$$x_2=3,\ y_2=4,\ z_2=9,\ t_2=6;$$

$$x_3=4,\ y_3=3,\ z_3=6,\ t_3=9 \text{ и т. д.}$$

327. Обозначая ряд равных отношений через $k$, т. е.

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\cdots=\frac{x_{n-1}}{x_n}=k, \tag{1}$$

находим:

$$\begin{aligned} x_1&=kx_2,\\ x_2&=kx_3,\\ x_3&=kx_4, \\ &\cdots\ \cdots \\ x_{n-1}&=kx_n; \end{aligned} \tag{2}$$

откуда

$$x_1 = x_2 k = x_3 k^2 = x_4 k^3. \tag{3}$$

Из соотношения (3) и из третьего уравнения системы получим: $k^3 = 8$; $k = 2$.

Воспользуемся свойством ряда равных отношений; имеем:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \cdots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = 2;$$

принимая во внимание второе уравнение системы, из последнего соотношения находим:

$$\frac{15 - x_n}{15 - x_1} = 2. \tag{4}$$

Из соотношений (1) видно, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ составляют геометрическую прогрессию, у которой знаменатель равен $\frac{1}{2}$, поэтому

$$x_n = x_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \tag{5}$$

Решая систему уравнений (4) и (5), находим $x_1$; зная $x_1$ и $k$, находим $x_2$ и т. д.

**Ответ.** $x_1 = \dfrac{15 \cdot 2^{n-1}}{2^n - 1}$, и т. д.

**328.** Перемножив почленно уравнения системы, находим:

$$(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n)^{n-2} = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

откуда

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = \sqrt[n-2]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Умножая числитель и знаменатель $m$-го уравнения системы на $x_m$, приведем его к виду

$$a_m x_m^2 = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n,$$

следовательно,

$$x_m = \sqrt{\frac{\sqrt[n-2]{a_1 a_2 \ldots a_n}}{a_m}},$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots, n$.

**329.** Указание. Имеем:

$$x! + y! = (x + y)!$$

или

$$\frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} = \frac{(x + y)!}{x!y!}.$$

Правая часть полученного выражения — целое число, левая часть может быть целым числом только при $x = y = 0$; $x = y = 1$; $x = y = 2$.

**Ответ.** $x = y = 1$
$z = 2$.

## § 7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

**331.** $n > \frac{5}{4}$. **332.** $k = 2(4 + 3i)$. **334.** $x = 11$, $y = -2$. **335.** 1.

**340.** 4096. **341.** $-\frac{4}{3}$.

**343.**
$$\begin{cases} \frac{5}{4}(1+i), & \text{если } n = 1, \\ \left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right)(1+i), & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

**344.** 2, если $n = 3k$,
$-1$, если $n = 3k + 1$; $3k + 2$.

**345.** $\sqrt{i} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

**346.** Модуль числа $i$ равен 1, аргумент $-\frac{\pi}{2}$. По известной формуле находим:

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3},$$

где $k = 0, 1, 2$.

**Ответ.** $\frac{\sqrt{3} + i}{2}$; $\frac{-\sqrt{3} + i}{2}$; $-i$.

**352.** $x_1 = 1 - i$, $x_2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$.

**357.** Известно, что корни $2n$-ой степени из единицы

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, 2n).$$

Разлагая $x^{2n} - 1$ на множители, находим:

$$x^{2n} - 1 = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{2n}) = \prod_{k=1}^{2n}(x - x_k).$$

Это выражение можно записать так:

$$x^{2n} - 1 = \prod_{k=1}^{n-1}(x - x_k) \cdot \prod_{k=n+1}^{2n-1}(x^2 - 1)(x - x_k)$$

Учитывая, что корни $x_n = -1$, $x_{2n} = 1$

и, кроме того,

$$x_{2n-k} = \cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n} = \bar{x}_k,$$

имеем $x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}(x - x_k)(x - \bar{x}_k) = (x^2 - 1)\times$

$$\times \prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right).$$

**358.** Решение аналогично предыдущему.

**359.** Если в формуле бинома $(1 + x)^n$ положить $x = i$, то

$$(1 + i)^n = \left(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots\right) + \\ + i\left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \cdots\right); \qquad (1)$$

но

$$(1 + i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = \\ = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right). \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) находим:

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - \cdots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

**Ответ.** $2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$.

## § 8. НЕРАВЕНСТВА

**363.** Абсолютная величина вещественного числа $x$ обозначается символом $|x|$ и определяется так:

$$|x| = x, \text{ если } x \geqslant 0,$$
$$|x| = -x, \text{ если } x < 0.$$

а) Из соотношения $|x| < \alpha$ вытекает, что

$$x < \alpha,$$
$$-x < \alpha. \qquad (1)$$

Умножая последнее неравенство на $-1$, находим

$$x > -\alpha,$$

или

$$-\alpha < x. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) вытекает, что

$$-\alpha < x < \alpha.$$

в) Из соотношений $-\alpha < x < \alpha$ следует:

если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, т. е. $x < \alpha$ или $|x| < \alpha$;

если $x < 0$, то $|x| = -x$, т. е. $-x < \alpha$ или $|x| < \alpha$.

Следовательно,

$$|x| < \alpha,$$

что и требовалось доказать.

**364.** а) Если $x + y > 0$, то по определению (см. предыдущую задачу)

$$|x + y| = x + y. \tag{1}$$

Но $x \leqslant |x|$, $y \leqslant |y|$, поэтому

$$x + y \leqslant |x| + |y|. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) вытекает

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

в) Если $x + y < 0$, то

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y. \tag{3}$$

Но $-x \leqslant |x|$, $-y \leqslant |y|$, следовательно,

$$-x - y \leqslant |x| + |y| \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4) вытекает, что

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

**365.** Указание. Имеем:

$$x = (x - y) + y,$$

т. е.

$$|x| = |(x - y) + y| \leqslant |x - y| + |y|,$$

откуда

$$|x - y| \geqslant |x| - |y|.$$

**366.** Пусть $x \geqslant y$; тогда

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0,$$

$$x^2 + y^2 \geqslant 2xy$$

откуда

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2.$$

**367.** Пусть $\frac{a}{b} = \frac{1}{p} \leqslant 1$, $\frac{b}{c} = \frac{1}{q} \leqslant 1$;

тогда

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{pq},$$

$$\frac{c}{a} = pq,$$

и заданное неравенство перепишется так:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + pq \geqslant 3.$$

Исходя из того, что $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$

$$(p - 1)(q - 1) \geqslant 0,$$

т. е.

$$pq \geqslant p + q - 1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + pq \geqslant \left(\frac{1}{p} + p\right) + \left(\frac{1}{q} + q\right) - 1 \geqslant 3.$$

Здесь равенство возможно только при условии, что

$$\frac{1}{p} + p = \frac{1}{q} + q = 2,$$

или

$$p = q,$$

т. е. при

$$a = b = c.$$

**369.** Имеем:

$$a < b$$

$$ak < bk$$

$$ab + ak < ab + bk$$

$$a(b + k) < b(a + k)$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a + k}{b + k}.$$

**370.** Указание. Составить очевидные неравенства:

$$a^2 \geqslant a^2 - (b-c)^2,$$
$$b^2 \geqslant b^2 - (c-a)^2,$$
$$c^2 \geqslant c^2 - (a-b)^2.$$

Почленное умножение этих неравенств приводит к следующему неравенству:

$$a^2b^2c^2 \geqslant (a+b-c)^2\,(a+c-b)^2\,(b+c-a)^2,$$

откуда

$$abc \geqslant (a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a).$$

**371.** Имеем:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3},$$

$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5},$$

. . . . . .

$$\frac{99}{100} < \frac{100}{101},$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100} < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}.$$

Обозначая

$$x = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100},$$

находим

$$x < \frac{1}{101x},$$

откуда

$$x < \frac{1}{\sqrt{101}} < \frac{1}{10}.$$

**372.** Указание. В данном произведении все дроби правильные, поэтому (см. № 369) находим (при $k = 1$):

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\right)^2 < \frac{1\cdot3\cdot5\ldots2n-1}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\times$$

$$\times\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2n}{3\cdot5\ldots(2n+1)} = \frac{1}{2n+1},$$

откуда вытекает искомое неравенство.

**373.** $x < 0{,}5$. **374.** $\frac{3}{2} < x < \frac{10}{3}$. **375.** $-\frac{1}{3} < x < 2$.

**376.** Обозначим длины коромысел весов $x$ и $y$ ($x \neq y$). Пусть на одну чашку весов положена гиря весом 1 *кг*, на вторую — товар весом $a$ *кг*. Для равновесия необходимо, чтобы

$$x \cdot 1 = y \cdot a,$$

откуда

$$a = \frac{x}{y}.$$

Поменяв местами гирю и товар весом $c$ *кг*, получим:

$$y \cdot 1 = x \cdot c,$$

откуда

$$c = \frac{y}{x}.$$

Общий вес отпущенного товара

$$a + c = \frac{x}{y} + \frac{y}{x};$$

но сумма двух обратных положительных дробей (см. № 366)

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2.$$

Итак, товара отпущено больше, чем полагалось.

**377.** Пусть $a$ и $d$ — соответственно наибольший и наименьший члены геометрической пропорции, составленной из положительных чисел:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

откуда

$$d = b \cdot \frac{c}{a} = c \cdot \frac{b}{a},$$

где

$$\frac{c}{a} < 1, \quad \frac{b}{a} < 1.$$

Составляя производную пропорцию

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} > 1,$$

находим, что

$$a - b > c - d,$$

откуда

$$a + d > b + c.$$

**378.** Имеем:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2}{2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geqslant 0.$$

Итак, среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического. Равенство будет иметь место при $a_1 = a_2$.

**379.** Указание. Известно (см. предыдущую задачу), что

$$\sqrt{a_1 a_2} \leqslant \frac{a_1 + a_2}{2},$$

$$\sqrt{a_1 a_3} \leqslant \frac{a_1 + a_3}{2},$$

. . . . . .

$$\sqrt{a_{n-1} a_n} \leqslant \frac{a_{n-1} + a_n}{2}.$$

Складывая данные неравенства, находим искомое неравенство.

**380.** Указание. Имеем (см. № 378):

$$1 + a_1 \geqslant 2\sqrt{1 \cdot a_1}$$

$$1 + a_2 \geqslant 2\sqrt{1 \cdot a_2}$$

. . . . . .

$$1 + a_n \geqslant 2\sqrt{1 \cdot a_n}.$$

Перемножив почленно эти неравенства и учитывая условия задачи ($a_1 a_2 \ldots a_n = 1$), находим искомое неравенство.

**381.** Указание. Применить теорему Бернулли (см. № 486).

**389.** Доказательство методом математической индукции. Для $n = 1; 2$, неравенство (см. № 378)

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \qquad (1)$$

справедливо. Пусть оно справедливо для любого $n$, докажем, что оно справедливо и для $(n + 1)$.

Обозначим: $a_{n+1}$ — наибольшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$$a_{n+1} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = M_n; \quad \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} = M_{n+1},$$

$a_{n+1} = M_n + \varepsilon$, где $\varepsilon \geqslant 0$.

Из этих соотношений находим

$$M_{n+1} = \frac{n \cdot M_n + a_{n+1}}{n+1} = M_n + \frac{E}{n+1}; \qquad (2)$$

$$\left(M_{n+1}\right)^{n+1} = \left(M_n + \frac{\varepsilon}{n+1}\right)^{n+1} = M_n^{n+1} +$$

$$+ (n+1) M_n^n \cdot \frac{\varepsilon}{n+1} + \cdots \geqslant M_n^{n+1} + M_n^n \cdot \varepsilon =$$

$$= M_n^n \left(M_n + \varepsilon\right) = M_n^n \cdot a_{n+1}, \qquad (3)$$

откуда $\left(M_{n+1}\right)^{n+1} \geqslant M_n^n a_{n+1}$.

Но

$$M_{n+1} \geqslant \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}},$$

т. е. $$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \geqslant \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}},$$

что и требовалось доказать.

**391.** Имеем:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} =$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n}\right) + \cdots + \frac{1}{2n+1} =$$

$$= \frac{2(2n+1)}{(n+1)(3n+1)} + \frac{2(2n+1)}{(n+2)3n} + \cdots + \frac{2(2n+1)}{2(2n+1)^2} >$$

$$> 2(2n+1)\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{2(2n+1)^2}\right] =$$

$$= 2(2n+1)\left[\frac{n}{(2n+1)^2} + \frac{1}{2(2n+1)^2}\right] = 1,$$

что и требовалось доказать.

**392.** Обозначая $\sqrt[n]{n} - 1 = z$, где $z > 0$, находим:

$$n = (1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot z^2 + \cdots + z^n,$$

откуда

$$n > \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot z^2,$$

$$z^2 < \frac{2}{n-1} < \frac{4}{n} \quad (n > 2),$$

т. е.

$$0 < z < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

или

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

**393.** Среднее квадратичное нескольких неотрицательных чисел не меньше их среднего арифметического, поэтому

$$\sqrt{\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} + \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n},$$

откуда

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} + \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}\right)^2 \cdot n.$$

Если воспользоваться неравенством (см. № 388)

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2,$$

т. е.

$$\frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n},$$

то данное неравенство можно преобразовать так:

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{S_n}{n} + \frac{n}{S_n}\right)^2 \cdot n.$$

Вычитая из обеих частей последнего неравенства по $4n$, получим

$$\left[\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 - 4\right] + \left[\left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 - 4\right] +$$

$$+ \cdots + \left[\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 - 4\right] \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{S_n}{n} + \frac{n}{S_n}\right)^2 \cdot n - 4n,$$

т. е.

$$\left(a_1-\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2-\frac{1}{a_2}\right)^2+\cdots+\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)^2\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{S_n}{n}-\frac{n}{S_n}\right)^2\cdot n.$$

## § 9. ПРОГРЕССИИ

**394.** Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=27 & (1)\\ a_1^2+a_2^2+a_3^2=275. & (2)\end{cases}$$

Кроме того, $\frac{a_1+a_3}{2}\cdot 3=27$,

или

$$a_1+a_3=18. \qquad (3)$$

Из соотношений (1) и (3) находим: $a_2=9$.

Зная $a_2$, предыдущую систему уравнений запишем так:

$$\begin{cases} a_1+a_3=18\\ a_1^2+a_3^2=194,\end{cases}$$

откуда $a_1=5$; $a_3=13$.

**Ответ.** $\div 5,\ 9,\ 13,\ \ldots$

**395.** По условию задачи

$$S_n=3n^2.$$

При $n=1$ имеем $S_1=a_1=3$;
при $n=2$ имеем $S_2=a_1+a_2=12$;
следовательно, $a_2=9$.

**Ответ.** $\div 3\ 9,\ 15,\ 21,\ \ldots$

**396.** Из соотношения $35=11+6d$ находим разность $d=4$ для первой прогрессии.

Так как $a_4=a_4'$, то $11+3\cdot 4=38+3d'$,
откуда разность $d'=-5$ для второй прогрессии.

Число членов второй прогрессии $n'$ находим из соотношения $13=38+(n'-1)(-5)$.

**Ответ.** $n'=6$.

**397.** Пусть $a_n$, $a_{n-2}$ и $a_1$ — стоимость последнего метра, третьего с конца и первого. Тогда, по условию задачи, находим:

$$a_n+a_{n-2}=a_1\cdot n,$$

или

$$a_1+(n-1)\,d+a_1+(n-3)\,d=a_1n,$$

т. е.

$$2d\,(n-2) = a_1\,(n-2),$$
$$(n-2)\,(2d - a_1) = 0,$$

откуда $a_1 = 2d = 4$ (так как по условию $d = 2$ а $n - 2 \neq 0$).

Известно, что средняя стоимость одного метра равна 17 руб., поэтому

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} = 17,$$

или $S_n = 17 \cdot n$,

$$\frac{2a_1 + (n-1)\,d}{2} \cdot n = 17\ n,$$

откуда $n = 14$.

**Ответ.** Глубина колодца 14 *м*.

**398.** Пусть некоторые члены первой арифметической прогрессии $a_n$ соответственно равны членам второй прогрессии $a'_m$, т. е.

$$5 + (n-1)\,3 = 3 + (m-1)\,4,$$

или

$$3n + 2 = 4m - 1,$$

откуда

$$n = m + \frac{m}{3} - 1. \qquad (A)$$

Чтобы $n$ принимало только целые положительные значения, необходимо, чтобы $\frac{1}{3}\,m = k$ — целому положительному числу, т. е. $m = 3k$. Но тогда из равенства (А) имеем

$$n = 4k - 1. \qquad (B)$$

Равными членами данных двух прогрессий являются те, для которых числа $k$ и $n$ из равенства (В) одновременно будут целыми и положительными. Например если $k = 1$, то $n = 3$; если $k = 2$, то $n = 7$ и т. д.

По условию $n$ может принимать значения 1, 2, 3, . . ., 100, следовательно, $k = 1, 2, 3, \ldots, 25$.

Итак, одинаковых членов в рассматриваемых двух арифметических прогрессиях будет 25. Они следующие: 11, 23, 35, . . ., 299.

**399.** Находим

$$a_m - a_n = (m-n)\,d,$$

или

$$n - m = (m-n)\,d,$$

следовательно,

$$d = -1.$$

Кроме того,

$$a_p - a_n = (p-n)\,d,$$

откуда находим искомую величину $a_p$.

**Ответ.** $a_p = m + n - p$.

**400.** Обозначим искомое число средних арифметических буквой $x$. Вставить $x$ средних арифметических, это значит составить арифметическую прогрессию, у которой будет $x + 2$ члена и крайними будут $a_1 = 1$ и $a_n = 31$.

Найдем разность прогрессии $d$ из соотношения

$$31 = 1 + (x + 1)\, d,$$

откуда

$$d = \frac{30}{x + 1}.$$

Первое среднее арифметическое

$$a_2 = 1 + d$$

Последнее среднее арифметическое

$$a_{n-1} = 31 - d = \frac{31x + 1}{x + 1}.$$

Предпоследнее среднее арифметическое

$$a_{n-2} = 31 - 2d = \frac{31x - 29}{x + 1}.$$

Сумма всех средних арифметических

$$\frac{1 + d + 31 - d}{2} \cdot x = 16x.$$

Наибольшими средними арифметическими членами возрастающей арифметической прогрессии будут $a_{n-1}$ и $a_{n-2}$.

Отсюда, согласно условию задачи,

$$4\left(\frac{31x + 1}{x + 1} + \frac{31x - 29}{x + 1}\right) = 16x,$$

или

$$2x^2 - 29x + 14 = 0.$$

**Ответ.** $x = 14$.

**401.** 25 350.

**402.** 75.

**403.** Преобразуем заданные соотношения так:

$$(a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 34,$$

т. е.

$$2a_1 + 5d = 17,$$

или

$$(a_1 + d) + (a_1 + 4d) = 17$$

и

$$(a_1 + d) \cdot (a_1 + 4d) = 52.$$

По сумме и произведению двух неизвестных $(a_1 + d)$ и $(a_1 + 4d)$ находим

$$a_1 + d = 4,$$

$$a_1 + 4d = 13,$$

откуда

$$a_1 = 1,\ d = 3.$$

Следовательно,

$$a_{20} = 1 + 19 \cdot 3 = 58.$$

**Ответ.** 58.

**404.** Указание.

$$\frac{(a_2 + a_{2n})\, n}{2} = 126,$$

$$21 \cdot n = 126,$$

$$n = 6.$$

**Ответ.** 6.

**405.** По условию числа $a$, $b$ и $c$ составляют арифметическую прогрессию, т. е.

$$a - b = b - c. \tag{1}$$

Докажем, что

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}. \tag{2}$$

Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} =$$

$$= \frac{b - c}{(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})}. \tag{3}$$

Аналогично, используя равенства (1), получим:

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{a - b}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} =$$

$$= \frac{b - c}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}. \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4) вытекает равенство (2), что и требовалось доказать.

**406.** По условию

$$S_n = S_m \ (m \neq n),$$

т. е.

$$[2a_1 + d\,(n - 1)]\, n = [2a_1 + d\,(m - 1)]\, m,$$

откуда

$$2a_1 = -d\,(m + n - 1).$$

Кроме того,

$$S_{m+n} = \frac{[2a_1 + d(m+n-1)](m+n)}{2}.$$

Заменяя в последнем равенстве $2a_1$ его значением, находим:

$$S_{m+n} = \frac{0 \cdot (m+n)}{2} = 0.$$

**Ответ.** $S_{m+n} = 0$.

**407.** Указание. Имеем:

$$\frac{S_n}{n} + \frac{S_{3n}}{3n} = \frac{S_{2n}}{n},$$

откуда и находим: $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

**408.** Указание.

При $n = 1$ $S_1 = a_1 = 7$;

$$n = 2 \; S_2 = a_1 + a_2 = 7 + a_2 = 20,$$

$$a_2 = 13.$$

**Ответ.** $\div 7, 13, 19, \ldots$

**409.** Имеем:

$$S_m = \frac{2a_1 + (m-1\ d}{2} m,$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

По условию

$$\frac{[2a_1 + (m-1)d] \cdot m}{[2a_1 + (n-1)d] \cdot n} = \frac{m^2}{n^2},$$

$$(2a_1 - d)(m-n) = 0 \quad (m \neq n),$$

откуда

$$a_1 = \frac{d}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + (m-1)d}{a_1 + (n-1)d} = \frac{\frac{d}{2} + (m-1)d}{\frac{d}{2} + (n-1)d} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

**Ответ.** $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

**410.** Если данные числа, расположенные в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию, то имеет место следующее равенство:

$$2 \lg (2^x - 1) = \lg 2 + \lg (2^x + 3),$$

$$\lg (2^x - 1)^2 = \lg 2 \cdot (2^x + 3),$$

откуда

$$2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 5 = 0,$$

$$2^x = 5 \quad (2^x = -1).$$

**Ответ.** $x = \log_2 5$.

**411.** По условию задачи составим равенство:

$$\log_k x - \log_m x = \log_m x - \log_n x,$$

или

$$2 \log_m x = \log_k x + \log_n x.$$

Заменяя в этом равенстве каждое слагаемое отношением двух величин, по формуле

$$\log_a N = \frac{\log_k N}{\log_k a}$$

находим:

$$2 \frac{\log_k x}{\log_k m} = \frac{\log_k x}{\log_k k} + \frac{\log_k x}{\log_k n},$$

или

$$2 \log_k n = \log_k m \, (1 + \log_k n),$$

$$\log_k n^2 = \log_k m \, (\log_k k + \log_k n) = \log_k (kn)^{\log_k m},$$

откуда

$$n^2 = (kn)^{\log_k m},$$

что и требовалось доказать.

**412.** Первый член второй группы

$$3 = 2 \cdot \frac{2 \cdot (2-1)}{2} + 1.$$

Первый член третьей группы

$$7 = 2 \cdot \frac{3 \cdot (3-1)}{2} + 1,$$

. . . . . .

Первый член $n$-й группы

$$2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + 1 = n^2 - n + 1.$$

Итак, $a_1 = n^2 - n + 1$, $d = 2$, $a_n = n^2 + n - 1$.
Следовательно,

$$S_n = \frac{(n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1)\, n}{2} = n^3.$$

**Ответ.** $S_n = n^3$.

**413.** Указание. Легко заметить, что $k$-я группа содержит $2k-1$ членов. Последний член $k$-й группы равен $k^2$, последний член $(k-1)$-й группы равен $(k-1)^2$, поэтому первый член $k$-й группы равен $(k-1)^2+1$.

Итак,

$$S_k=\frac{[(k-1)^2+1+k^2](2k-1)}{2}=(k^2-k+1)(2k-1).$$

**Ответ.** В $k$-й группе $2k-1$ членов.

$$S_k=(k^2-k+1)(2k-1).$$

**414.** Арифметическая прогрессия с четным числом членов имеет вид:

$$S_{2n}=S_n+S_n'=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+$$
$$+(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}),$$

где $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$, $S_n'=\frac{a_{n+1}+a_{2n}}{2}\cdot n$;

$$a_n=a_1+(n-1)d,\ a_{n+1}=a_1+nd,\ a_{2n}=a_1+(2n-1)d.$$

Из этих соотношений находим $S_n'-S_n=\frac{n}{2}\cdot 2dn=dn^2$, что и требовалось доказать.

**415.** Обозначим сумму первых $n$ членов искомой арифметической прогрессии

$$S=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

Сумма $kn$ следующих ее членов

$$S'=\frac{a_{n+1}+a_{(k+1)n}}{2}\cdot kn.$$

Пусть отношение $S$ к $S'$ равно $m$, т. е.

$$\frac{a_1+a_n}{(a_{n+1}+a_{(k+1)n})k}=m$$

или

$$\frac{2a_1+(n-1)d}{\{2a_1+nd+[(k+1)n-1]d\}k}=m,$$

откуда, после преобразования, находим:

$$(2a_1-d)(mk-1)-nd[(k+2)mk-1]=0. \qquad (1)$$

Последнее соотношение, согласно условию, не зависит от $n$, поэтому коэффициент при $n$ будет равен нулю, т. е. $(k+2)mk-1=0$.

откуда

$$m = \frac{1}{k(k+2)}.$$

Выражение (1) после замены $m$ его значением принимает вид:

$$(2a_1 - d)\frac{k+1}{k+2} = 0,$$

где второй множитель отличен от нуля, поэтому:

$$2a_1 - d = 0,\ d = 2a_1.$$

Искомая арифметическая прогрессия имеет вид:

$$a_1,\ 3a_1,\ 5a_1,\ 7a_1, \ldots$$

**416.** Обозначим искомые числа так:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2a \\ a_2 &= 2a + 2b = 2(a + b) \\ a_3 &= 2a + 4b = 2(a + 2b) \\ a_4 &= 2a + 6b = 2(a + 3b). \end{aligned} \tag{1}$$

По условию

$$12(a + 2b)(2a + 3b) = (2a + b)^3. \tag{2}$$

Из последнего равенства следует, что $(2a + b)^3$ должно делиться на 4, для чего $b$ должно делиться на 2, т. е. $b = 2c$. При таком условии равенство (2) принимает вид

$$3(a + 4c)(a + 3c) = (a + c)^3, \tag{3}$$

откуда следует, что $a + c$ делится на 3, т. е. $a + c = 3k$.

Равенство (3) после преобразования принимает вид:

$$(3k + 2c)(k + c) = 3k^2,$$

или

$$2c^2 + 5kc - 3k^2(k - 1) = 0,$$

откуда

$$c_1 = \frac{-5k + k\sqrt{24k+1}}{4}\left(c_2 = \frac{-5k - k\sqrt{24k+1}}{4}\right);$$

$$a = 3k - c_1 = \frac{17k - k\sqrt{24k+1}}{4}.$$

Для того, чтобы $a \geqslant 0$, необходимо, чтобы

$$17 \geqslant \sqrt{24k+1},$$

т. е.

$$k \leqslant 12.$$

Из всех значений $k$ подберем такие, чтобы выражение $24k + 1$ являлось полным квадратом, эти значения будут 1, 2, 5, 7 и 12.

**Ответ.** Искомые числа:

6, 6, 6, 6.
10, 14, 18, 22.
14, 70, 126, 182
0, 144, 288, 432.

**417.** Пусть $d > 0$. Имеем:

$$d = a_2 - a_1 = \cdots = a_n - a_{n-1} > 0.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{a_1 \cdot a_2} = \dfrac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} \cdot \dfrac{1}{d} = \left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2}\right) \cdot \dfrac{1}{d}, \\ \dfrac{1}{a_2 \cdot a_3} = \dfrac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} \cdot \dfrac{1}{d} = \left(\dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_3}\right) \cdot \dfrac{1}{d}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1} a_n} = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} \cdot a_n} \cdot \dfrac{1}{d} = \left(\dfrac{1}{a_{n-1}} - \dfrac{1}{a_n}\right) \cdot \dfrac{1}{d} \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \quad + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) \cdot \frac{1}{d} =$$

$$= \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} \cdot \frac{1}{d} = \frac{n-1}{a_1 a_n},$$

где $a_n - a_1 = (n-1)\,d$.

**418.** В арифметической прогрессии

$$a_k - a_{k-1} = d$$

($k = 2, 3, 4, \ldots n$).

Имеем:

$$S = \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \cdots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{d} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d} = \frac{a_n - a_1}{d\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}\right)} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}},$$

так как $a_n - a_1 = (n-1)\,d$, что и требовалось доказать.

**419.** Имеем:

$$a_n = 1 + 17 \cdot (n-1) = 333\ldots3, \qquad (1)$$

где $n$ — номера искомых членов прогрессии.

Из соотношения (1) вытекает, что числа типа 3333 . . . 3 при делении на 17 дают в остатке 1. Первым числом, удовлетворяющим условию задачи, будет число, которое записывается с помощью четырех троек, т. е. 3333; при этом $n = 197$.

Искомые члены арифметической прогрессии будут числа, которые содержат

$$16k + 4 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

троек, так как при делении чисел 333 . . . 3 на 17 без остатка получается период, состоящий из 16 цифр.

**420.** $\div$ — 1, 0, 1, 2.

**421.** Имеем:

$$a_1 + (k - 1)\, d = a,$$
$$a_1 + (p - 1)\, d = b,$$
$$a_1 + (q - 1)\, d = c.$$

Необходимо и достаточно, чтобы эти три уравнения были справедливы при определенных значениях $a_1$ и $d$. Искомым условием является результат исключения $a_1$ и $d$ из данных трех уравнений:

$$(a - b)(p - q) = (b - c)(k - p).$$

**Ответ.** $(p - q)\, a + (q - k)\, b + (k - p)\, c = 0$.

**422.** Допустим, что $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ являются членами арифметической прогрессии; тогда

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = md,$$
$$\sqrt{5} - \sqrt{2} = nd,$$

где $d$ — разность арифметической прогрессии, $m$ и $n$ — целые числа. Имеем:

$$m(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = n(\sqrt{3} - \sqrt{2}),$$
$$m\sqrt{5} - n\sqrt{3} = (m - n)\sqrt{2}.$$

Возводим обе части равенства в квадрат, получим:

$$5m^2 + 3n^2 - 2mn\sqrt{15} = 2(m - n)^2,$$

откуда

$$\sqrt{15} = \frac{5m^2 + 3n^2 - 2(m - n)^2}{2mn},$$

но это невозможно, так как $\sqrt{15}$ — число иррациональное.

**423.** Путь, проходимый падающим телом, вычисляется по формуле арифметической прогрессии. В данном случае $a_1 = 4{,}9$, $d = 9{,}8$ для обоих тел. Пусть первое тело падало $x$ сек., а второе — $(x - 3)$ сек.

По условию

$$S_1 - S_2 = 1000 \text{ м},$$

где $S_1$ и $S_2$ — длина пути, пройденного первым телом и, соответственно, вторым телом, до того момента, когда расстояние между ними будет равно 1 *км*.

По формулам арифметической прогрессии

$$S_1 = \frac{[2a_1 + d(x-1)]\,x}{2} = 4{,}9x^2,$$

$$S_2 = \frac{[2a_1 + d(x-4)]\,(x-3)}{2} = 4{,}9\,(x-3)^2.$$

Следовательно,

$$S_1 - S_2 = 4{,}9x^2 - 4{,}9\,(x-3)^2 = 1000,$$

т. е.

$$14{,}7\,(2x-3) = 1000.$$

**Ответ.** $x \approx 35{,}5$ сек.

**424.** Первый автоматический станок был включен в 8 час., а остальные 15 станков включились через $\frac{1}{30}$ часа, поэтому все станки были включены через полчаса.

Все автоматы работали одновременно 6,5 часа и за это время дали продукции

$$m \cdot 16 \cdot 6{,}5 = 104m\ (м).$$

Для вычисления производительности станков в пусковой период применим формулу арифметической прогрессии:

$$S = \frac{[2a_1 + d(n-1)]\,n}{2} = 4m\ (м),$$

где $a_1 = \frac{m}{2}$, $d = -\frac{m}{30}$, $n = 15$.

**Ответ.** 108 $m$ (метра).

**425.** Если биквадратное уравнение имеет четыре вещественных корня, то они попарно равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Обозначим их так: $\pm a_1$; $\pm a_2$.

Пусть $a_1 > a_2$. По условию эти четыре числа составляют арифметическую прогрессию (при этом допущении — возрастающую). Запишем ее так:

$$-a_1,\ -a_2,\ a_2,\ a_1. \qquad (1)$$

Из первых и последних трех членов арифметической прогрессии вытекают следующие соотношения:

$$-2a_2 = a_2 - a_1,$$

$$2a_2 = a_1 - a_2,$$

откуда

$$\mp 3a_2 = \mp a_1. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) находим:

$$-3a_2,\ -a_2,\ a_2,\ 3a_2$$

Следовательно, четыре корня биквадратного уравнения относятся между собой как

$$(-3) : (-1) : 1 : 3.$$

**Ответ.** $(-3) : (-1) : 1 : 3.$

**426.** Решая данное уравнение, находим, что его больший корень равен 10.

Определим общий член разложения бинома:

$$T_{k+1} = C_{20}^k x^{\frac{k-20}{4}+\frac{k}{6}}.$$

Если это слагаемое бинома не зависит от $x$, то

$$\frac{k-20}{4} + \frac{k}{6} = 0,$$

откуда $k = 12$; следовательно, номер члена разложения бинома равен 13.

По условию задачи составляем уравнения:

$$a_1 a_4 = 10,$$
$$a_2^2 + a_3^2 = 5 \cdot 13.$$

Заменяя значения

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_1 + 3d$$

и решая систему уравнений, находим: $d = \pm 3$, и т. д.

**Ответ.** $\div 1, 4, 7, 10,$

или $\div -1, -4, -7, -10.$

**427.** По формуле $S_n = \frac{u_1 (q^n - 1)}{q - 1}$ находим $u_1$, т. е.

$$635 = u_1 (2^7 - 1),$$

следовательно,

$$u_1 = 5;\ u_n = 5 \cdot 2^6 = 320.$$

**Ответ.** $u_1 = 5,\ u_n = 320.$

**428.** Имеем:

$$u_m = u_1 q^{m-1}$$
$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Разделив почленно первое равенство на второе и заменяя $u_m$ и $u_n$ их значениями, получим

$$\frac{k}{l} = q^{m-n},$$

откуда

$$q = \sqrt[m-n]{\frac{k}{l}},$$

следовательно,

$$u_1 = \sqrt[m-n]{\frac{l^{m-1}}{k^{n-1}}}.$$

Но $u_p = u_1 q^{p-1}$; заменяя $u_1$ и $q$ их значениями, находим ответ:

$$u_p = \sqrt[m-n]{\frac{k^{p-n}}{l^{p-m}}}.$$

**429.** Имеем:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_4}{u_3} = \frac{u_6}{u_5} = \cdots = \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = q,$$

откуда, используя свойство ряда равных отношений, находим

$$\frac{u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}}{u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1}} = q,$$

что и требовалось доказать.

**430.** Имеем:

$$u_5 = u_1 q^4, \; u_2 = u_1 q, \; u_6 = u_1 q^5.$$

Подставляя эти соотношения в заданные равенства, имеем:

$$\begin{cases} u_1 (1 + q^4) = 51 \\ u_1 q (1 + q^4) = 102. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $q = 2$, $u_1 = 3$.

Подставляя в формулу суммы членов Г. П. найденные значения $q$ и $u_1$, получим:

$$3069 = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1},$$

или $1024 = 2^n$, т. е. $2^{10} = 2^n$.

**Ответ.** $n = 10$.

**431.** Решение аналогично предыдущему.

**Ответ.** $\div 9, 27, 81, 243, \ldots$

**432.** Имеем:

$$1 = \frac{10-1}{9};\ 11 = \frac{10^2-1}{9};\ \ldots;\ \frac{10^n-1}{9}.$$

Суммируя, находим

$$S_n = \frac{1}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n - n).$$

**Ответ.** $S_n = \frac{1}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{9} - n\right]$.

**433.** Вставить $n$ средних пропорциональных между двумя данными числами, это значит составить такую геометрическую прогрессию, у которой число членов будет равно $n+2$ и крайними членами будут заданные числа.

В данном случае последнему члену прогрессии предшествует 10 членов, поэтому

$$\frac{a^2}{b^3} = \frac{b^2}{a^3} \cdot q^{10},$$

откуда

$$q = \sqrt[10]{\frac{a^5}{b^5}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Искомая прогрессия будет

$$\pm\frac{b^2}{a^3};\ \frac{b^2}{a^3}\sqrt{\frac{a}{b}};\ \frac{b}{a^2};\ \ldots;\ \frac{a^2}{b^3}.$$

**434.** 4; 16; 64.

**435.** Обозначим последовательные члены Г. П. $u_{k-2}$, $u_{k-1}$, $u_k$ $(k \geqslant 3)$. По условию находим:

$$\begin{cases} u_1 q^{k-3} + u_1 q^{k-2} + u_1 q^{k-1} = 62 \\ 3 \lg u_1 + (3k-6) \lg q = 3, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} u_1 q^{k-2}(1 + q + q^2) = 62 \\ u_1 q^{k-2} = 10. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$q_1 = 5,\ u_1 = 2;\ q_2 = 0{,}2,\ u_1' = 50.$$

**Ответ.** 2, 10, 50 или 50, 10, 2.

**436.** 3, 6, 12 или 12, 6, 3.

**437.** Указание.

$$u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 195$$
$$u_1 q^2 - u_1 = 120.$$

**Ответ.** $\pm 15,\ 45,\ 135, \ldots$

$\pm 125,\ -175,\ 245, \ldots$

**438.** 18 446 744 073 709 551 615 зерен.

18 квинтиллионов 446 квадриллионов 744 триллиона 73 биллиона (миллиарда) 709 миллионов 551 тысяча 615 зерен.

Примечание. Если засевать всю пахотную землю земного шара, то и через десятки лет нельзя собрать такой урожай.

**439.** Пусть четыре числа будут следующие:

$$\log_a x,\ \log_{ax} x,\ \log_{ax^2} x,\ \log_{ax^3} x.$$

По условию

$$\log_a x + \log_{ax} x = \log_{ax^2} x + \log_{ax^3} x,$$

т. е.

$$\log_a x + \frac{\log_a x}{\log_a ax} = \frac{\log_a x}{\log_a ax^2} + \frac{\log_a x}{\log_a ax^3}.$$

После элементарных преобразований получим:

$$3 \log_a^2 x + 6 \log_a x + 2 = 0,$$

откуда

$$\log_a x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}.$$

**Ответ.** $\log_a x = \frac{-3 + \sqrt{3}}{3}$; $\log_a x = \frac{-3 - \sqrt{3}}{3}$.

**440.** Если числа $\lg m$, $\lg n$ и $\lg p$ составляют геометрическую прогрессию, то имеет место равенство:

$$\lg m \cdot \lg p = (\lg n)^2.$$

Используя формулу (см. №.501), получим:

$$\frac{\lg x}{\log_m x} \cdot \frac{\lg x}{\log_p x} = \frac{(\lg x)^2}{(\log_n x)^2},$$

или

$$\log_m x \cdot \log_p x = (\log_n x)^2,$$

что и требовалось доказать.

**441.** Пусть $S$ — сумма всех членов геометрической прогрессии, $S_1$ — сумма членов этой прогрессии, стоящих на нечетных местах.

По условию

$$S = 3S_1,$$

т. е.

$$\frac{u_1(q^{2n}-1)}{q-1} = 3\frac{u_1(q^{2n}-1)}{q^2-1},$$

откуда

$$q = 2.$$

**Ответ.** $q = 2$.

**442.** Квадраты членов геометрической прогрессии образуют геометрическую прогрессию, у которой первый член равен $u_1^2$ и знаменатель — $q^2$, т. е.:

$$u_1^2,\ u_1^2q^2,\ u_1^2q^4,\ \ldots$$

следовательно,

$$S_n = \frac{u_1^2(q^{2n}-1)}{q^2-1}.$$

**443.** Обозначим первый член геометрической прогрессии $u_1$, знаменатель — $q$, сумму членов — $S_1$. Квадраты членов этой прогрессии образуют геометрическую прогрессию, у которой первый член равен $u_1^2$, знаменатель — $q^2$ и сумма — $S_2$.

Имеем:

$$S_1 = \frac{u_1(q^{2n+1}-1)}{q-1}.$$

Сумма квадратов нечетного числа членов, равного $2n+1$,

$$S_2 = \frac{u_1^2(q^{4n+2}-1)}{q^2-1}.$$

Тогда

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{u_1(q^{4n+2}-1)(q-1)}{(q^2-1)(q^{2n+1}-1)} =$$

$$= \frac{u_1(q^{2n+1}+1)}{q+1} = u_1(q^{2n} - q^{2n-1} + \cdots + 1),$$

что и требовалось доказать.

**444.** По условию

$$u_1 = 10(u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 + \cdots) = \frac{10u_1q}{1-q},$$

откуда $q = \frac{1}{11}$.

Следовательно, любая бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, у которой знаменатель равен $\frac{1}{11}$, будет удовлетворять условию задачи.

**445.** Знаменатель прогрессии

$$q = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

По формуле предела суммы бесконечно убывающей Г. П. находим:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2a}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}},$$

или

$$8 = \frac{2a}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

**Ответ.** $a = 2(2 - \sqrt{2})$.

**446.** Пусть $\frac{1}{2} < q < 1$ — знаменатель прогрессии. Допустим, что

$$q = \frac{1}{2} + \varepsilon \ (0 < \varepsilon < 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{2u_1}{1-2\varepsilon},$$

$$u_2 = u_1 q = \frac{u_1(1+2\varepsilon)}{2}.$$

Рассмотрим разность

$$S - 4u_2 = \frac{2u_1}{1-2\varepsilon} - 2u_1(1+2\varepsilon) = \frac{4u_1 \cdot \varepsilon^2}{\frac{1}{2} - \varepsilon} > 0;$$

так как

$$u_1\varepsilon^2 > 0, \quad \frac{1}{2} - \varepsilon > 0,$$

следовательно,

$$S > 4u_2.$$

Случай, когда $0 < q < \frac{1}{2}$, рассмотреть самостоятельно.

Р е ш е н и е 2-е.

Доказать, что

$$S = \frac{u_1}{1-q} > 4u_1q, \tag{1}$$

где $u_1$ и $u_1q$ — первый и второй члены прогрессии, $u_1 > 0$, $q \neq \frac{1}{2}$, $0 < q < 1$.

Из неравенства (1) находим:

$$\frac{1}{1-q} > 4q,$$

$$1 > 4q\,(1-q),$$

$$1 - 4q + 4q^2 > 0,$$

т. е.

$$(1-2q)^2 > 0,$$

что и требовалось доказать.

**447.** Рассмотрим две прогрессии, при этом вторая прогрессия составлена из квадратов членов первой:

$$\div u_1,\ u_1q,\ u_1q^2,\ \ldots,\ u_1q^{n-1},\ \ldots$$

$$\div u_1^2,\ u_1^2q^2,\ u_1^2q^4,\ \ldots,\ u_1^2q^{2(n-1)},\ \ldots$$

По условию

$$u_2 = u_1q = 6$$

$$\frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{8}\cdot\frac{u_1^2}{1-q^2},$$

$$\frac{u_1}{q+1} = 8;\quad \frac{u_1q}{(1+q)\,q} = 8;\quad \frac{6}{(1+q)\,q} = 8,$$

откуда

$$4q^2 + 4q - 3 = 0,$$

$$q = \frac{1}{2}.$$

**Ответ.** $\div 12,\ 6,\ 3,\ \ldots$

**448.** Чистая периодическая дробь 0, (37) может быть представлена в виде бесконечной суммы

$$0{,}37 + 0{,}0037 + 0{,}000037 + \ldots$$

Суммируя, находим

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{0{,}37}{1-0{,}01} = \frac{37}{99}.$$

2. Аналогично

$$0{,}23\,(345) = 0{,}23 + 0{,}00345 + 0{,}00000345 + \cdots =$$

$$= 0{,}23 + \frac{0{,}00345}{1-0{,}001} = 0{,}23 + \frac{0{,}00345}{0{,}999} =$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{345}{999\cdot 100} = \frac{23\,(1000-1)+345}{99\,900} = \frac{23\,345-23}{99\,900}.$$

**Ответ.** 1) $\frac{37}{99}$; 2) $\frac{23\,322}{99\,900}$.

**449.** Принимая за единицу времени час, а за единицу длины — длину окружности циферблата часов, будем иметь: через 1 час минутная стрелка будет стоять над цифрами 12, а часовая — над цифрой 1, т. е. последняя пройдет $\frac{1}{12}$ часть пути, пройденного минутной стрелкой: часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной.

Пока минутная стрелка пройдет $\frac{1}{12}$ пути, часовая пройдет $\frac{1}{12}\times$ $\times\frac{1}{12} = \frac{1}{12^2}$; пока минутная стрелка пройдет путь, равный $\frac{1}{12^2}$, часовая пройдет путь, равный

$$\frac{1}{12^2}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{12^3},$$

и т. д.

Следовательно, когда минутная стрелка пройдет путь, равный сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \cdots,$$

она догонит часовую.

Суммируя, находим

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{12}} = \frac{12}{11}.$$

Минутная стрелка проходит единицу пути в 1 час, поэтому она догонит часовую стрелку через

$$1 \text{ час}\cdot\frac{12}{11} = 1 \text{ час } 5 \text{ мин. } 27\frac{3}{11} \text{ сек.}$$

**Ответ.** 1 час 5 мин. $27\frac{3}{11}$ сек.

**450.** Имеем:

$$S' = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n} =$$

$$= \frac{1}{u_1}\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{u_1}\left(\frac{1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}}{q^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{u_1\,(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})}{u_1 \cdot u_1 q^{n-1}} = \frac{S_n}{u_1 \cdot u_n},$$

где $S_n$ — сумма членов Г. П.

**Ответ.** $\dfrac{S_n}{u_1 \cdot u_n}$.

**451.** Имеем

$$\Pi_n = u_1 \cdot u_2 \ldots u_n = u_1 \cdot u_1 q \cdot u_1\, q^2 \ldots u_1 q^{n-1} =$$

$$= u_1^n \cdot 1q \cdot q^2 \ldots q^{n-1} =$$

$$= u_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(u_1 \cdot q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n =$$

$$= \left(u_1^{\frac{1}{2}} \cdot u_1^{\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n = \left(u_1^{\frac{1}{2}} \cdot u_n^{\frac{1}{2}}\right)^n =$$

$$= (u_1 \cdot u_n)^{\frac{n}{2}}.$$

**Ответ.** $(u_1 u_n)^{\frac{n}{2}}$.

**452.** Имеем (см. № 450):

$$S_n' = \frac{S_n}{u_1 \cdot u_n}; \quad u_1 \cdot u_n = \frac{S_n}{S_n'};$$

$$\Pi_n = (u_1 \cdot u_n)^{\frac{n}{2}} \quad \text{(см. № 451)}.$$

Следовательно, $\Pi_n = \left(\dfrac{S_n}{S_n'}\right)^{\frac{n}{2}}$.

**Ответ.** $\left(\dfrac{S_n}{S_n'}\right)^{\frac{n}{2}}$.

**453.** Если положительные числа $a$, $b$ и $c$ — последовательные члены геометрической прогрессии, то

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}.$$

Логарифмируя это соотношение по основанию $N \neq 1$, получим:

$$\log_N b - \log_N a = \log_N c - \log_N b,$$

или

$$\frac{1}{\log_b N} - \frac{1}{\log_a N} = \frac{1}{\log_c N} - \frac{1}{\log_b N},$$

откуда после очевидных преобразований, находим

$$\frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N \cdot \log_a N} = \frac{\log_b N - \log_c N}{\log_c N \cdot \log_b N},$$

или

$$\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N}. \qquad (2)$$

Легко доказать, что из соотношения (2) вытекает соотношение (1). Последнее предлагаем сделать читателю.

**454.** Если числа $a$, $b$ и $c$ образуют геометрическую прогрессию, то

$$b^2 = ac.$$

Логарифмируя это равенство, находим

$$2\log_N b = \log_N a + \log_N c.$$

Воспользуемся формулой

$$\log_N x = \frac{1}{\log_x N}$$

и последнее равенство перепишем так:

$$\frac{2}{\log_b N} = \frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_c N}.$$

Полученное выражение и есть ответ на поставленный в задаче вопрос т. е. что числа

$$\frac{1}{\log_a N}, \quad \frac{1}{\log_b N} \text{ и } \frac{1}{\log_c N}$$

образуют арифметическую прогрессию.

**455.** По условию

$$a = a_1 + 4d = u_1 \cdot q^4,$$

$$b = a_1 + 16d = u_1 \cdot q^{16},$$

$$c = a_1 + 36d = u_1 \cdot q^{36},$$

поэтому

$$a - b = -12d,$$

$$b - c = -20d,$$

$$c - a = 32d,$$

откуда

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = (u_1 q^4)^{-20d} \cdot (u_1 q^{16})^{32d} \cdot (u_1 q^{36})^{-12d} = 1,$$

где $a_1$ и $u_1$ — собственно первые члены арифметической и геометрической прогрессий, $d$ — разность арифметической прогрессии, $q$ — знаменатель геометрической прогрессии.

**456.** По условию

$$u_1 = d,\ a_1 = q,\ u_1 + u_2 = 9,\ S_{10} = 155.$$

$$\left(\frac{2a_1 + 9d}{2}\right) \cdot 10 = 155,$$

или

$$2a_1 + 9d = 31,$$

$$u_1 + u_1 q = 9,$$

т. е.

$$2q + 9u_1 = 31,$$

$$u_1 + u_1 q = 9,$$

откуда

$$q_1 = 2;\quad q_1' = 12{,}5;\quad u_1 = 3;\quad u_1' = \frac{2}{3}.$$

**Ответ.**

$$\div 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \ldots;\ \div\div 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \ldots$$

или

$$\div \frac{25}{2},\ \frac{79}{6},\ \frac{83}{6},\ \ldots;\ \div\div \frac{2}{3},\ \frac{25}{3},\ \frac{625}{6},\ \ldots$$

**457.** Имеем:

$$(a_1 + d)^2 = a_1 (a_1 + 3d),$$

откуда

$$a_1 = d.$$

Следовательно,

$$a_4 = a_1 + 3d = 4a_1,$$
$$a_6 = a_1 + 5d = 6a_1,$$
$$a_9 = a_1 + 8d = 9a_1.$$

Эти три числа образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен $\frac{3}{2}$.

**Ответ.** $q = \frac{3}{2}$.

**458.** Искомые суммы трех членов каждой прогрессии будут отличаться только вторыми членами. Известно, что второй член арифметической прогрессии равен среднему арифметическому $a_1$ (первого) и $a_3$ (третьего) членов, второй член геометрической прогрессии равен среднему геометрическому тех же членов, но

$$\frac{a_1 + a_3}{2} > \sqrt{a_1 a_3},$$

следовательно, сумма трех членов арифметической прогрессии будет больше суммы трех членов геометрической прогрессии.

**459.** Пусть $x$, $y$ и $z$ — искомые числа, тогда

$$y = x + d = xq,$$
$$z = x + 2d = xq^2$$

Исключая $d$, находим $x(1 - q)^2 = 0$.
Если $x = 0$, то $x = y = z = 0$.
Если $x \neq 0$, то $q = 1$, а $x = y = z$.

**Ответ.** Числа равны между собой.

**460.** Имеем:

$$a = u_1 \cdot q^{k-1},$$
$$b = u_1 \cdot q^{p-1},$$
$$c = u_1 \cdot q^{m-1}.$$

Искомым условием является результат исключения $u_1$ и $q$ из этих трех уравнений, т. е.:

$$\frac{a}{b} = q^{k-p}; \quad \frac{b}{c} = q^{p-m};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{p-m} = q^{(k-p)(p-m)},$$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^{k-p} = q^{(p-m)(k-p)},$$

откуда

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{p-m} = \left(\frac{b}{c}\right)^{k-p}.$$

**Ответ.** $a^{p-m} \cdot b^{m-k} \cdot c^{k-p} = 1$.

**461.** Пусть заданные три числа расположены в убывающем или возрастающем порядке.

1. Если эти числа являются членами арифметической прогрессии, то они отделены друг от друга промежуточными членами, которые будут средними арифметическими между числами $a$ и $b$ и числами $b$ и $c$. Обозначим число средних $(m - 1)$ и $(n - 1)$ соответственно; тогда разность прогрессии будет равна $\frac{b-a}{m}$ или $\frac{c-b}{n}$; откуда

$$\frac{b-a}{m} = \frac{c-b}{n}.$$

Это и есть искомое условие.

2. Допустим, что $a$ — первый член геометрической прогрессии $m$ и $n$ — число членов, предшествующих $b$ и $c$; тогда

$$b = aq^m$$

$$c = aq^n.$$

Исключая из этих соотношений знаменатель прогрессии $q$, находим:

$$\frac{b^n}{c^m} = \frac{a^n}{a^m},$$

т. е.

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{c}{a}\right)^m.$$

Это и есть искомое условие.

**462.** Указание. См. № 461. Имеем:

$$\left(\frac{12}{11}\right)^n = \left(\frac{13}{11}\right)^m$$

или

$$\frac{12^n}{13^m} = 11^{n-m},$$

что невозможно.

**Ответ.** Нет.

**464.** Обозначим искомые числа, члены арифметической прогрессии,

$$\div a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d.$$

Прибавляя к ним соответственно 5, 6, 9 и 15, по условию задачи имеем геометрическую прогрессию:

$$\div a_1 + 5,\ a_1 + d + 6,\ a_1 + 2d + 9,\ a_1 + 3d + 15.$$

Согласно определению Г. П., напишем следующие соотношения:

$$\frac{a_1 + d + 6}{a_1 + 5} = \frac{a_1 + 2d + 9}{a_1 + d + 6} = \frac{a_1 + 3d + 15}{a_1 + 2d + 9};$$

решая эту систему уравнений, находим $a_1 = 3$, $d = 3$.

**Ответ.** 3, 6, 9, 12.

**465.** Обозначим искомые числа геометрической прогрессии

$$u_1,\ u_1q,\ u_1q^2 \text{ и } u_1q^3.$$

Прибавляя к ним указанные в условии числа, находим четыре члена арифметической прогрессии:

$$u_1 + 4,\ u_1q + 21,\ u_1q^2 + 29,\ u_1q^3 + 1.$$

Известно, что каждый член А. П. (кроме первого) является средним арифметическим двух соседних с ним членов, поэтому имеем следующие соотношения:

$$\begin{cases} u_1q + 21 = \dfrac{1}{2}(u_1 + 4 + u_1q^2 + 29) \\ u_1q^2 + 29 = \dfrac{1}{2}(u_1q + 21 + u_1q^3 + 1), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u_1q^2 - 2u_1q + u_1 = 9 \\ q(u_1q^2 - 2u_1q + u_1) = 36, \end{cases}$$

откуда

$$q = 4,\ u_1 = 1.$$

**Ответ.** 1, 4, 16, 64.

**466.** Решая показательное уравнение, находим корень

$$x = S_5 = 5.$$

Ищем предел суммы членов бесконечно убывающей Г. П.:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{2},$$

т. е.

$$a_n = \frac{3}{2}.$$

Составим два уравнения:

$$\frac{\left(a_1+\frac{3}{2}\right)5}{2}=5, \text{ откуда } a_1=\frac{1}{2};$$

$$\frac{3}{2}=a_1+4d, \text{ откуда } d=\frac{1}{4}.$$

**Ответ.** $\div\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$

**467.** Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{8}{1-\frac{7}{8}}=64.$$

$$S_n=\frac{8\left[1-\left(\frac{7}{8}\right)^n\right]}{\frac{1}{8}}=64-64\left(\frac{7}{8}\right)^n.$$

Для выполнения условия необходимо показать, что справедливо неравенство $\left|64\left(\frac{7}{8}\right)^n\right|<0{,}01$, начиная с некоторого значения $n$. Решая это неравенство, находим $n\geqslant 66$.

**Ответ.** Необходимо взять не меньше 66 членов.

**468.** По условию $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{7}{2}$, $a_1=3$. Подставляя эти значения в формулу

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q},$$

получим

$$\frac{7}{2}=\frac{3}{1-q}; \quad q=\frac{1}{7}.$$

**Ответ.** $\div 3; \frac{3}{7}; \frac{3}{49}; \ldots$

**469.** $\div 24, 27, 30, \ldots, 54$.

**470.** 108 и 135.

**471.** $u_7=27$.

**472.** По условию $a_{12}^2$, $a_{13}^2$ и $a_{15}^2$ образуют геометрическую прогрессию

поэтому

$$a_{13}^2 \cdot a_{13}^2 = a_{12}^2 \cdot a_{15}^2,$$

откуда

$$\frac{a_{13}}{a_{12}} = \pm \frac{a_{15}}{a_{13}}. \qquad (1)$$

Но $a_{12}$, $a_{13}$, $a_{15}$ — члены арифметической прогрессии, т. е.

$$a_{13} = a_{12} + d,\ a_{15} = a_{12} + 3d = a_{13} + 2d. (d \neq 0).$$

Из соотношения (1) при верхнем знаке находим:

$$\frac{a_{12} + d}{a_{12}} = \frac{a_{13} + 2d}{a_{13}},$$

т. е.

$$\frac{d}{a_{12}} = \frac{2d}{a_{13}},$$

следовательно, $\frac{a_{13}}{a_{12}} = 2;\quad q = \frac{a_{13}^2}{a_{12}^2} = 4.$

Из соотношения (1) при нижнем знаке находим:

$$\frac{a_{12} + d}{a_{12}} = -\frac{a_{12} + 3d}{a_{12} + d},$$

т. е

$$2a_{12}^2 + 5da_{12} + d^2 = 0,$$

откуда

$$a_{12} = \frac{(-5 \pm \sqrt{17})\, d}{4};\quad \frac{d}{a_{12}} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

$$q = \left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\right)^2 = \left(1 + \frac{d}{a_{12}}\right)^2 = \frac{13 \pm 3\sqrt{17}}{2}.$$

**Ответ.** $q_1 = 4,\ q_{2,3} = \frac{13 \pm 3\sqrt{17}}{2},\ (d \neq 0);\ q_4 = 1\ (d = 0).$

**473.** $\pm$ 1, 3, 9, 27, . . .
$\pm$ 1, 5, 9, 13, . . .

**474.** $\pm$ 4, 12, 36.

**475.** По условию искомые три числа составляют геометрическую прогрессию. Обозначим их так:

$$u_1,\ u_1 q,\ u_1 q^2$$

где $u_1$ — первый член и $q$ — знаменатель Г. П.

Числа $u_1$, $u_1q$ и $(u_1q^2 - 64)$ составляют арифметическую прогрессию, поэтому:

$$(u_1q^2 - 64) - u_1q = u_1q - u_1. \quad (1)$$

Но числа

$$u_1,\ (u_1q - 8) \text{ и } (u_1q^2 - 64)$$

опять составляют геометрическую прогрессию, следовательно:

$$\frac{u_1q^2 - 64}{u_1q - 8} = \frac{u_1q - 8}{u_1}. \quad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) как систему, находим искомые числа.
**Ответ.** $\mp 4,\ 20,\ 100.$

$$\mp\frac{4}{9},\ \frac{52}{9},\ \frac{676}{9}.$$

**476.** $\mp 81,\ 54,\ 36,\ 24,\ 16,\ \ldots$

**477.** $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**478.** Обозначая разность арифметической прогрессии $d$, находим:

$$c^2 - a^2 = 2d,$$

$$c^2 - b^2 = d,$$

$$b^2 - a^2 = d,$$

или

$$(c + a)(c - a) = 2d,$$

$$(c - b)(c + b) = d,$$

$$(b - a)(b + a) = d.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b + c} = \frac{c - b}{d},$$

$$\frac{1}{c + a} = \frac{c - a}{2d},$$

$$\frac{1}{a + b} = \frac{b - a}{d}.$$

Из последних соотношений получим:

$$\frac{1}{a + b} - \frac{1}{c + a} = \frac{2b - a - c}{2d},$$

$$\frac{1}{c + a} - \frac{1}{b + c} = \frac{2b - a - c}{2d},$$

откуда

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}=\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c},$$

что и требовалось доказать.

**479.** По условию задачи имеем:

$$u_1q^{n+1}=u_1q^{n-1}+u_1q^n,\ (n\geqslant 1)$$

следовательно, при $n=1$ находим:

$$q^2-q-1=0,$$

$$q_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Итак, знаменатель геометрической прогрессии принимает найденные два значения: верно и обратное утверждение.

**480.** а) Пусть дан квадрат $ABCD$ (см. рис. 1); его площадь $S_1=a^2$. Впишем в него квадрат $A_1B_1C_1D_1$ так, чтобы его вершина $A_1$ находилась от вершин $A$ и $B$ на расстоянии

$$AA_1=\frac{a}{n}\quad\text{и}\quad BA_1=\frac{(n-1)a}{n}.$$

Кроме того,

$$AA_1=BB_1=CC_1=DD_1.$$

Квадрат стороны квадрата $A_1B_1C_1D_1$

$$A_1B_1^2=\frac{a^2}{n^2}+\frac{(n-1)^2a^2}{n^2}=\frac{a^2}{n^2}[1+(n-1)^2].$$

Площадь квадрата равна квадрату его стороны, поэтому

$$S_2=\frac{a^2}{n^2}[1+(n-1)^2].$$

Для вписанного квадрата $A_2B_2C_2D_2$ и последующих соответственно находим:

$$A_2A_1=\frac{a\sqrt{1+(n-1)^2}}{n^2};\qquad A_2B_1=\frac{(n-1)a\sqrt{1+(n-1)^2}}{n^2},$$

. . . . . .

$$S_3=\frac{a^2[1+(n-1)^2]}{n^4}+\frac{a^2[1+(n-1)^2](n-1)^2}{n^4}=$$

$$=\frac{a^2}{n^4}[1+(n-1)^2]^2,$$

$$S_4=\frac{a^2[1+(n-1)^2]^2}{n^6}+\frac{a^2[1+(n-1)^2]^2(n-1)^2}{n^6}=$$

$$=\frac{a^2}{n^6}[1+(n-1)^2]^3,$$

. . . . . .

Легко заметить, что

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{S_3}{S_2}=\frac{S_4}{S_3}=\ldots=\frac{1+(n-1)^2}{n^2},$$

поэтому последовательность

$$S_1,\ S_2,\ S_3\ \ldots\ldots,\ S_m,\ \ldots$$

является членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой

$$q=\frac{1+(n-1)^2}{n^2}<1;$$

$$S=\frac{a^2}{1-\dfrac{1+(n-1)^2}{n^2}}=\frac{n^2a^2}{2(n-1)}.$$

**Ответ.** $S=\dfrac{n^2a^2}{2(n-1)}$; $n\geqslant 2$.

в) Предел суммы площадей всех вписанных квадратов будет наименьшим, если площадь каждого из них будет наименьшей.

Пусть на сторонах заданного квадрата $ABCD$ отложены равные отрезки $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ и $DD_1$; точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ и $D_1$ соединены прямыми. При каком значении отрезка $AA_1$ вписанный квадрат $A_1B_1C_1D_1$ имеет наименьшую площадь?

Если обозначить отрезок $AA_1=x$, то $AD_1=a-x$. Из прямоугольного треугольника $AA_1D_1$ находим:

$$A_1D_1^2=x^2+(a-x)^2=2x^2-2ax+a^2.$$

Замечая, что $A_1D_1^2=S$ — площади вписанного квадрата $A_1B_1C_1D_1$, имеем:

$$S=2x^2-2ax+a^2=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}.$$

Следовательно, $S$ принимает наименьшее значение, если одно из положительных слагаемых равно нулю, т. е.

$$x-\frac{a}{2}=0,$$

откуда

$$AA_1=x=\frac{a}{2}.$$

Итак, точки $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ и последующие нужно помещать на серединах сторон квадратов. Дальше решение аналогично предыдущему.

**Ответ.** $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a^2$.

**481.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2a\sqrt{3}\pi}{3}$; $\frac{\pi a^2}{9}$.

**482.** Длина стороны первого вписанного квадрата служит диаметром второго круга и равна $R\sqrt{2}$. Радиус второго круга равен $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Радиус третьего круга равен

$$\frac{R\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{R}{2}.$$

Радиус четвертого круга равен

$$\frac{R}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{R\sqrt{2}}{4}$$

и т. д.

Предел суммы длин радиусов (когда их число $n\to\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\left[R+\frac{R\sqrt{2}}{2}+\frac{R}{2}+\frac{R\sqrt{2}}{4}+\cdots\right]=R(1+\sqrt{2})\sqrt{2}.$$

Предел суммы площадей кругов

$$\lim_{n\to\infty}\left[\pi R^2+\frac{\pi R^2}{2}+\frac{\pi R^2}{4}+\cdots\right]=2\pi R^2.$$

**Ответ.** $R(1+\sqrt{2})\sqrt{2}$; $2\pi R^2$.

**483.** $V_n=a^2h\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\cdots\right)=a^2h$

**484.** $V_к=\frac{3a^3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}$; $V_ш=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2(3\sqrt{3}-1)}$.

**485.** 2, 4, 8, 12 или 12,5; 7,5; 4,5; 1,5.

**486.** По определению геометрической прогрессии

$$u_1:u_2=u_n:u_{n+1} \qquad (1)$$

для $n=2, 3, \ldots$

Если геометрическая прогрессия возрастающая, то $u_{n+1}$ и $u_1$ — наибольший и наименьший ее члены пропорции (1) (если Г. П. убывающая, то $u_{n+1}<u_1$).

Тогда (см. неравенство Эвклида, № 377)

$$u_{n+1}+u_1>u_2+u_n,$$
$$u_{n+1}>u_n+u_2-u_1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
u_3&>u_2+(u_2-u_1)\\
u_4&>u_3+(u_2-u_1)\\
&+\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
u_{n+1}&>u_n+(u_2-u_1)\\
\hline
u_{n+1}&>u_2+(n-1)(u_2-u_1).
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$u_2 + (n-1)(u_2 - u_1) = a_2 + (n-1)(a_2 - a_1) = a_{n+1},$$

так как

$$u_2 - u_1 = a_2 - a_1.$$

Итак

$$u_{n+1} > a_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

487. Указание. Имеем:

$$a_1 = \frac{x-1}{x}, \quad a_n = \frac{1}{x}, \quad n = x - 1.$$

**Ответ.** $S_n = \frac{x-1}{2}$.

488. Чтобы найти сумму квадратов первых $n$ чисел натурального ряда, рассмотрим тождество

$$3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3 - x^3.$$

Полагая в этом тождестве $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ и сложив почленно $n$ равенств, находим:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n = (n+1)^3 - 1,$$

или

$$3S_2 + 3S_1 + n = (n+1)^3 - 1,$$

где $S_1$ и $S_2$ — сумма $n$ чисел натурального ряда и сумма их квадратов соответственно.

Заменяя в последнем равенстве

$$S_1 = \frac{(n+1)n}{2},$$

легко найти $S_2$.

**Ответ.** $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

489. Решение 1-е. Чтобы найти сумму кубов первых $n$ натуральных чисел $S_3$, рассмотрим тождество

$$4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x+1)^4 - x^4.$$

Полагая в нем $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ и сложив почленно $n$ равенств, находим:

$$4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n = (n+1)^4 - 1.$$

Заменив $S_1$ и $S_2$ их значениями (см. предыдущую задачу), находим $S_3$

**Ответ.** $S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, т. е. $S_3 = S_1^2$.

Решение 2-е. Применим метод математической индукции Имеем:

$$1^3 = 1^2 \ (n = 1)$$

$$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 \ (n = 2)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 \ (n = 3).$$

Допустим, что равенство справедливо при некотором произвольном натуральном $n = k$, т. е.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2 = \left[\frac{k\,(k+1)}{2}\right]^2.$$

Докажем, что равенство справедливо и при $n = k + 1$:

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3) + (k+1)^3 = \left[\frac{k\,(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 =$$

$$= (k+1)^2 \left[\frac{k^2 + 4k + 4}{4}\right] = \left[\frac{(k+1)\,(k+2)}{2}\right]^2.$$

Следовательно, равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

справедливо при любом натуральном $n$.

**490.** Указание. Решение аналогично предыдущему. Воспользоваться тождеством

$$x^5 - (x-1)^5 = 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1$$

при $x = 1, 2, 3, \ldots, n$.

**491.** Умножая обе части равенства (1) (см. условие) на $a$, находим:

$$aS_n = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \cdots + na^n \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) получим:

$$(a-1)\,S_n = -(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1}) + na^n$$

или

$$(a-1)\,S_n = na^n - \frac{a^n - 1}{a-1},$$

откуда находим искомое.

**Ответ.** $S_n = \dfrac{na^n}{a-1} - \dfrac{a^n - 1}{(a-1)^2}$.

**492.** Разложим каждое слагаемое на разность двух простейших дробей по формуле

$$\frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Пусть $k = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$; тогда заданное соотношение принимает вид:

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Раскрывая скобки, находим ответ:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

**493.** Указание. Умножим обе части равенства на $x$; получим:

$$S_n \cdot x = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + 3x^4 + \cdots + kx^{k+1} + \cdots + nx^{n+1},$$

$$S_n = 1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + kx^k + \cdots + nx^n.$$

Имеем:

$$S_n x - S_n = -x - x^2 - x^3 - \cdots - x^n + nx^{n+1},$$

$$(x-1) S_n = -\frac{x^{n+1} - x}{x-1} + nx^{n+1}.$$

**Ответ.** $S_n = \dfrac{x\left[nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1\right]}{(x-1)^2}$.

**494.** Указание. Пусть $n = 2k$ — четное число. Имеем:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 =$$
$$= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \cdots + \left[(2k-1)^2 - (2k)^2\right] =$$
$$= -(1+2) - (3+4) - \cdots - (2k-1+2k) =$$
$$= -(1+2+3+4+\cdots+2k) =$$
$$= -\frac{2k(2k+1)}{2} = -\frac{n(n+1)}{2}.$$

Для $n = 2k+1$ вычислить самостоятельно.

**Ответ.** $-\dfrac{n(n+1)}{2}$ при $n$ четном.

$\dfrac{n(n+1)}{2}$ при $n$ нечетном.

**495.** Общий член данной суммы преобразуем так:

$$u_k = \frac{k^4}{4k^2 - 1} = \frac{1}{16}\left[\frac{16k^4 - 1 + 1}{4k^2 - 1}\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\left[(4k^2 + 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\right].$$

Суммируя при изменении $k$ от 1 до $n$, находим:

$$S=\frac{1}{16}\left\{[4\,(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+n]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{16}\left[4\cdot\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}+n+\frac{n}{2n+1}\right]=$$

$$=\frac{n\,(n+1)\,(n^2+n+1)}{6\,(2n+1)},$$

что и требовалось доказать.

**496.** Указание. Раскрыть скобки:

$$S_n=(x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n})+$$

$$+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\cdots+\frac{1}{x^{2n}}\right)-2n$$

и просуммировать выражения, заключенные в скобках.

**Ответ.** 1) $S_n=\dfrac{(x^{2n+2}+1)\,(x^{2n}-1)}{(x^2-1)\,x^{2n}}-2n$

2) $S_n=\dfrac{x^{2\,(2n+1)}-1}{(x^2-1)\,x^{2n}}+(2n-1).$

**498.** Указание. Пусть $m$ и $n$ изменяются одновременно от 1 до $\infty$; тогда

$$\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)+$$

$$+\cdots=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n\,(n+1)}+\cdots$$

(см. № 492).

**Ответ.** 1.

**499.** Указание. При любом выборе чисел из данной таблицы, удовлетворяющих условию задачи, их сумма будет величиной постоянной и равной сумме чисел, расположенных по диагонали таблицы

В самом деле. Рассматривая числа таблицы, замечаем, что, например, число $3n + k$ находится в 3-й строке (считая верхнюю нулевой) и в $k$-том столбце. Выбираемые числа берутся по одному из каждого столбца и каждой строки, поэтому их сумма равна

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (1 \cdot n + 2 \cdot n + 3 \cdot n + \cdots + n^2) =$$
$$= 1 + (n + 2) + (2n + 3) + (3n + 4) + \cdots + n^2$$

Это и есть числа, расположенные по основной диагонали таблицы; они составляют арифметическую прогрессию, у которой $d = n + 1$, $a_1 = 1$, $a_n = n^2$ и число членов равно $n$.

Следовательно искомая сумма вычисляется по формуле

$$S = \frac{(1 + n^2)\, n}{2}.$$

500. Указание. Заданное выражение перепишем так:

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \cdot 5^{\frac{1}{16}} \cdots = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n+1}} + \cdots} \times$$
$$\times 5^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots}.$$

Но

$$\lim_{n \to \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{2n+1}} + \cdots \right) = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{n \to \infty} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots \right) = \frac{1}{3}.$$

**Ответ.** $\sqrt[3]{45}$.

## § 10. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

### а) Основные свойства логарифмов

501. Решение 1-е. Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a N} = N.$$

Логарифмируя его по основанию $b$, получим:

$$\log_a N \log_b a = \log_b N,$$

откуда

$$\frac{\log_b N}{\log_a N} = \log_b a.$$

что и требовалось доказать.

Решение 2-е. Обозначая

$$\log_b N = x, \quad \log_a N = y$$

соответственно находим

$$b^x = N, \quad a^y = N,$$

откуда

$$b^x = a^y.$$

Логарифмируя это соотношение по основанию $b$, имеем

$$x = y \log_b a,$$

или

$$\frac{x}{y} = \log_b a.$$

Заменяя $x$ и $y$ их значениями, находим искомое равенство, что и требовалось доказать.

**502.** Указание. Воспользоваться предыдущим равенством, учитывая, что при $N = b$, числитель дроби

$$\log_b b = 1.$$

**503.** Обозначая

$$\log_a N = y, \tag{1}$$

находим

$$a^y = N,$$

т. е.

$$a^{ny} = N^n,$$

откуда

$$\log_{a^n} N^n = y. \tag{2}$$

Сравнивая соотношения (1) и (2), получим искомое равенство.

**504.** Указание. Воспользоваться формулой задачи № 501

**505.** Указание. Воспользоваться формулой задачи № 501, полагая

$$b = 10, \quad N = x, \quad a = e.$$

По общепринятым обозначениям

$$\lg x = \log_{10} x, \quad \ln x = \log_e x.$$

**506.** Указание. $\lg 10 = \lg 2 + \lg 5$.

**Ответ.** $\lg 5 = 0{,}699\ldots$

**507.** $\lg 125 = 2{,}097\ldots$

**508.** Указание. Воспользоваться формулой задачи № 503.

**Ответ.** $\log_8 125 = \log_2 5$.

509. Имеем:

$$\log_6 16 = \frac{\log_{12} 16}{\log_{12} 6} = \frac{\log_{12} 2^4}{\log_{12}\left(\frac{12}{2}\right)} = \frac{4\log_{12} 2}{1-\log_{12} 2} = \frac{4a}{1-a}.$$

**Ответ.** $\frac{4a}{1-a}$.

510. Имеем:

$$\log_3 5 = \frac{\log_6 5}{\log_6 3} = \frac{b}{1-a},$$

так как

$$\log_6 3 = \log_6\left(\frac{6}{2}\right) = 1 - \log_6 2.$$

**Ответ.** $\frac{b}{1-a}$.

511. Указание. По формуле

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

находим:

$$\log_{35} 28 = \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \frac{\log_{14}\frac{14^2}{7}}{\log_{14} 35} = \frac{2\log_{14} 14 - \log_{14} 7}{\log_{14} 7 + \log_{14} 5}.$$

**Ответ.** $\frac{2-a}{a+b}$.

512. Имеем:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdots \log_{10} 9 = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 3 \cdot \lg 4} \cdots \frac{\lg 9}{\lg 10} = \lg 2.$$

513. 2) $343^{1-2\log_{49} 13} = 7^{3(1-\log_{7^2} 13^2)} =$

$$= 7^{3\log_7 \frac{7}{13}} = 7^{\log_7 \frac{7^3}{13^3}} = \frac{7^3}{13^3},$$

**Ответ.** 3; $\left(\frac{7}{13}\right)^3$.

515. Имеем:

$$\log_{\frac{1}{m}} \frac{1}{n} = -\log_{\frac{1}{m}} n = \frac{-1}{\log_n \frac{1}{m}} = \frac{1}{\log_n m} = \log_m n.$$

**516.** Имеем:

$$a^p = x,\ b^q = x,\ (abc)^r = x,$$

откуда

$$a = x^{\frac{1}{p}}.\quad b = x^{\frac{1}{q}};\quad abc = x^{\frac{1}{r}}.$$

$$ab = x^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}},\quad c = x^{\frac{1}{r}} : ab = x^{\frac{1}{r}} : x^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = x^{\frac{pq-r(p+q)}{rpq}}$$

Логарифмируя последнее соотношение по основанию $c$, находим:

$$\frac{pq - r(p+q)}{rpq} \cdot \log_c x = \log_c c.$$

**Ответ.** $\log_c x = \dfrac{rpq}{pq - r(p+q)}$.

**517.** Если $\log_{ab} a = n$, то $(ab)^n = a$; $b = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{a}$.

Логарифмируя заданное выражение, находим:

$$\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{3}\log_{ab} a - \frac{1}{2}\log_{ab} b = \frac{n}{3} - \frac{1}{2}\log_{ab} \frac{\sqrt[n]{a}}{a} =$$

$$= \frac{n}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\log_{ab} a - \log_{ab} a\right) = \frac{5n-3}{6}.$$

**Ответ.** $\dfrac{5n-3}{6}$.

**518.** 1.

**519.** Обозначая

$$-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\cdots\sqrt[3]{3}}} = z,$$

находим:

$$\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\cdots\sqrt[3]{3}}} = 3^{-z}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{\cdots\sqrt[3]{3}}} = 3^{3^{-z}}.$$

$$3^{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = 3^{\left(\frac{1}{3}\right)^z} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^z,\ z = n,$$

что и требовалось доказать.

**520.** Указание. По формуле задачи № 502 имеем.

$$\frac{1}{\log_a N} = \log_N a,$$

$$\frac{1}{\log_{a^2} N} = \log_N a^2 = 2\log_N a,$$

. . . . . .

$$\frac{1}{\log_{a^5} N} = \log_N a^5 = 5\log_N a.$$

Элементарные преобразования приводят к ответу; что и требовалось доказать.

**521.** Указание. Имеем:

$$\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \cdots + \frac{1}{\log_{a_n} x} =$$

$$= \log_x a_1 + \log_x a_2 + \cdots + \log_x a_n = \log_x a_1 \cdot a_2 \cdots a_n =$$

$$= \frac{1}{\log_{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} x},$$

откуда и находим требуемое соотношение.

**522.** Указание.

$$\frac{1}{\log_{abc} N} = \log_N abc = \log_N a + \log_N b + \log_N c =$$

$$= \frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_b N} + \frac{1}{\log_c N} =$$

$$= \frac{\log_b N \cdot \log_c N + \log_a N \cdot \log_c N + \log_a N \cdot \log_b N}{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N},$$

откуда находится требуемое соотношение.

**523.** Указание. См. решение № 512.

**524.** Указание. См. решение № 521.

**526.** Имеем:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b).$$

Логарифмируя это соотношение один раз по основанию $b + c$, второй — по основанию $c - b$, находим:

$$2\log_{b+c} a = \log_{b+c}(c - b) + 1.$$

$$2\log_{c-b} a = \log_{c-b}(c + b) + 1.$$

Перемножая почленно найденные равенства и учитывая, что

$$\log_{b+c}(c - b) \cdot \log_{c-b}(c + b) = 1,$$

получим:

$$2\log_{b+c}a\cdot\log_{c-b}a=\frac{1}{2}\left[\log_{b+c}(c-b)+\log_{c-b}(c+b)+2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\log_{b+c}a-1+2\log_{c-b}a-1+2\right)=\log_{b+c}a+\log_{c-b}a,$$

что и требовалось доказать.

**527.** Логарифмируя два последних равенства по основанию 10, находим:

$$\lg y=\frac{1}{1-\lg x},\quad \lg z=\frac{1}{1-\lg y},$$

откуда

$$\lg x=1-\frac{1}{\lg y}=\cdots=\frac{1}{1-\lg z}.$$

Потенцируя, находим:

$$x=10^{\frac{1}{1-\lg z}},$$

что и требовалось доказать

### б) Показательные уравнения

**528.** $4^x(4+1)=320;\ 4^x\cdot 5=320;\ 4^x=4^3$

**Ответ.** $x=3$.

**529.** $3^x(2\cdot 3-4\cdot 3^{-2})=450;\ 3^x=81,\ 3^x=3^4$.

**Ответ.** $x=4$.

**530.** $x=3$.

**531.** $10\cdot 2^x-2^{2x}-16=0$.

Пусть $2^x=z$; тогда

$$z^2-10z+16=0,$$

откуда

$$z_1=8,\ z_2=2,$$

т. е.

$$2^x=2^3,\ 2^x=2.$$

**Ответ.** $x_1=3,\ x_2=1$.

**532.** Имеем:

$$5^{2x}-20\cdot 5^x-125=0.$$

Пусть $5^x = z$; тогда данное уравнение принимает вид:

$$z^2 - 20z - 125 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 25 \ (z_2 = -5),$$

т. е.

$$5^x = 5^2.$$

**Ответ.** $x = 2$.

**533.** Находим, что

$$3 \cdot 3^{2x} - 29 \cdot 3^x + 18 = 0.$$

Пусть $3^x = z$; тогда

$$3z^2 - 29z + 18 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 9, \quad z_2 = \frac{2}{3},$$

т. е.

$$3^x = 3^2,$$

$$3^x = \frac{2}{3}.$$

**Ответ.** $x_1 = 2$; $x_2 = \dfrac{\lg 2}{\lg 3} - 1$.

**534.** $6 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{2x-4} - 81 = 0,$

или

$$81 \cdot 6 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{2x} - 81^2 = 0,$$

т. е.

$$5 \cdot 3^{2x} - 486 \cdot 3^x + 6561 = 0.$$

Пусть $3^x = z$; тогда

$$5z^2 - 486z + 6561 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 81, \quad z_2 = \frac{81}{5}.$$

Следовательно,

$$3^x = 81$$

и

$$3^x = \frac{81}{5}.$$

**Ответ.** $x_1 = 4$, $x_2 = 4 - \frac{\lg 5}{\lg 3}$.

**535.** $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\lg 5}{\lg 7}$.

**536.** Сгруппировав слагаемые, получим:

$$34 \cdot 7^x - 34 \cdot 5^{2x} = 0,$$

или

$$7^x - 5^{2x} = 0,$$

т. е.

$$7^x = 25^x.$$

$$\left(\frac{7}{25}\right)^x = 1.$$

**Ответ.** $x = 0$.

**537.** Имеем:

$$2 \cdot 4^{4x} - 9 \cdot 4^{2x} + 4 = 0.$$

Обозначая $4^{2x} = z$, находим:

$$2z^2 - 9z + 4 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 4, \quad z_2 = \frac{1}{2},$$

т. е.

$$4^{2x} = 4 \text{ и } 4^{2x} = \frac{1}{2}.$$

**Ответ.** $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$.

**538.** $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{\lg 3}{\lg 2} - 1$.

**539.** $x = 2$.

**540.** $2^{2x}(1+2^{-1}) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1)$;

$$2^{2x} \cdot 3 = 3^{x-\frac{1}{2}} \cdot 8; \quad 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}};$$

$$2^{2x-3} = (\sqrt{3})^{2x-3} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x-3} = 1,$$

$$2x - 3 = 0.$$

**Ответ.** $x = \frac{3}{2}$.

**541.** $5^{2x} \cdot 5^{-3} - 2 \cdot 5^{x} \cdot 5^{-2} - 3 = 0,$

$$5^{2x} - 10 \cdot 5^{x} - 375 = 0.$$

Обозначая $5^x = z$, получим:

$$z^2 - 10z - 375 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 25 \ (z_2 = -15).$$

Следовательно, $5^x = 5^2$.

**Ответ.** $x = 2$.

**542.** Указание. Правая часть уравнения есть бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, у которой

$$u_1 = 45{,}5; \ q = 22{,}75 : 45{,}5 = 0{,}5;$$

$$S = \frac{45{,}5}{1 - 0{,}5} = 91.$$

Заданное уравнение принимает вид:

$$3^{x-5} + 3^{x-7} + 3^{x-9} = 91,$$

или

$$3^{x-9}(3^4 + 3^2 + 1) = 91,$$

т. е.

$$3^{x-9} = 1,$$

следовательно, $x - 9 = 0$.

**Ответ.** $x = 9$.

**543.** $x_1 = 4, \ x_2 = 16.$

**544.** Имеем:

$$3^{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1}} = 3,$$

поэтому

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1} = 1$$

Решая это иррациональное уравнение, находим ответ.

**Ответ.** $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

**545** Имеем:

$$2^{2\sqrt{x-2}} - 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}} + 16 = 0.$$

Обозначая $2^{\sqrt{x-2}} = z$, находим:

$$z^2 - 10z + 16 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 2 \text{ или } 2^{\sqrt{x-2}} = 2$$

и

$$z_2 = 8 \text{ или } 2^{\sqrt{x-2}} = 8.$$

**Ответ.** $x_1 = 3$, $x_2 = 11$.

**546.** Имеем: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$,

или

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

**Ответ.** $x = -\frac{1}{4}$.

**547.** $5^{2(1+2+3+\cdots+x)} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-28}$,

или

$$5^{(1+x)x} = 5^{56},$$

откуда

$$(x+1)x = 56.$$

**Ответ.** $x_1 = 7$ ($x_2 = -8$).

**548.** $x = 9$.

**549.** Имеем:

$$\frac{1}{8} \cdot 4^{2x-3} = 8^x \cdot 2^{-\frac{x}{2}}, \quad 2^{4x-9} = 2^{3x-\frac{x}{2}};$$

$$4x - 9 = 3x - \frac{x}{2}, \quad x = 6.$$

**Ответ.** $x = 6$.

**550.** Имеем:

$$2^{2(x+\sqrt{x^2-2})} - 5\cdot 2^{-1}\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0.$$

Обозначая

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = z,$$

находим:

$$2z^2 - 5z - 12 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 4 \left(z_2 = -\frac{3}{2}\right).$$

Следовательно,

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 2^2,\ x + \sqrt{x^2-2} = 2,\ x = \frac{3}{2}.$$

**Ответ.** $x = \frac{3}{2}$.

**551.** Указание. Преобразуем заданное выражение так:

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^x = 4,$$

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + \frac{1}{(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x} = 4.$$

Обозначая

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = z,$$

получим:

$$z + \frac{1}{z} = 4$$

$$z^2 - 4z + 1 = 0,$$

откуда

$$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Итак, имеем два уравнения:

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2 - \sqrt{3},$$
$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2 + \sqrt{3}.$$

Решая эти уравнения, находим значения $x$.

**Ответ.** $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

**552.** Преобразуем заданное выражение так:

$$2^{2x} + 3^x \cdot 2^x = 3^{2x}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 = 0.$$

Обозначая

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = z,$$

получим

$$z^2 - z - 1 = 0.$$

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \left(z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),$$

или

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

откуда

$$x = \frac{\lg\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\lg\frac{3}{2}}.$$

**Ответ.** $x = \dfrac{\lg(1+\sqrt{5}) - \lg 2}{\lg 3 - \lg 2}$.

**553.** Указание. Легко заметить, что

$$\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)^3 = 2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right).$$

**Ответ.** $x = 1$.

### в) Логарифмические уравнения

**554.** $\lg(0{,}5 + x) = \lg\dfrac{0{,}5}{x}$,

т. е. $0{,}5 + x = \dfrac{0{,}5}{x}$, $2x^2 + x - 1 = 0$,

откуда $x_1 = 0{,}5$ ($x_2 = -1$).

**Ответ.** $x = 0{,}5$.

**555.** Указание. См. предыдущий пример.

**Ответ.** $x_1 = 3$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$.

**556.** $\lg(x-9)(2x-1)=\lg 100$

или

$$(x-9)(2x-1)=100,\ 2x^2-19x-91=0.$$

**Ответ.** $x=13$.

**557.** $\lg(\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{2x-3})=\lg\frac{30}{10}$,

т. е.

$$\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{2x-3}=3,\ 2x^2-13x+6=0.$$

**Ответ.** $x=6$.

**558.** $\lg\left(x-\frac{8}{9}\right)=\lg\left(\frac{1}{6}\right)^2$, $x-\frac{8}{9}=\frac{1}{36}$.

**Ответ.** $x=\frac{11}{12}$.

**559.** Логарифмируя, находим:

$$\lg^2 x-\lg x-2=0,$$

откуда

$$\lg x=2;\ x_1=10^2,$$

$$\lg x=-1;\ x_2=10^{-1}.$$

**Ответ.** $x_1=100$; $x_2=0{,}1$.

**560.** $x_1=0{,}1$; $x_2=100$.
**561.** $x_1=0{,}1$; $x_2=1000$.
**562.** $x_1=0{,}01$; $x_2=100$.
**563.** $x_1=10$; $x_2=10^5$.
**564.** Логарифмируя по основанию $x$, находим:

$$2\log_x 10\cdot\log_x x=\log_x 10+\log_x x,$$

или

$$\log_x 10=1.$$

**Ответ.** $x=10$.

**565.** Имеем:

$$2^{\frac{3}{\log_3 x}}=2^{-6},\ \frac{3}{\log_3 x}=-6,\ \log_3 x=-\frac{1}{2}.$$

**Ответ.** $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**566.** Логарифмируя по основанию $a$, получим:

$$\log_a^2 x-\log_a x-2=0,$$

откуда

$$\log_a x = 2;\ \log_a x = -1.$$

**Ответ.** $x_1 = a^2;\ x_2 = a^{-1}$.

**567.** Логарифмируя, получим:

$$2\lg^4 x - 1{,}5\lg^2 x - 0{,}5 = 0,$$

или

$$4\lg^4 x - 3\lg^2 x - 1 = 0,$$

откуда

$$\lg x_1 = 1;\ \lg x_2 = -1.$$

**Ответ.** $x_1 = 10;\ x_2 = 0{,}1$.

**568.** Потенцируя, находим:

$$x^2 - 11x + 43 = 5^2,$$

т. е.

$$x^2 - 11x + 18 = 0.$$

**Ответ.** $x_1 = 2;\ x_2 = 9$.

**569.** Имеем:

$$\lg\left(8\cdot\sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}}\right) = \lg 1,\ 8\cdot\sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}} = 1;\ 2^{\frac{x^2-14,5x}{10}} = 2^{-3},$$

$x^2 - 14{,}5x + 30 = 0$.

**Ответ.** $x_1 = 2{,}5;\ x_2 = 12$.

**570.** $x_1 = 4;\ x_2 = 36$.

**571.** Освобождаясь от радикала, имеем:

$$16 - 8\lg x + \lg^2 x = 9\lg x,$$

или

$$\lg^2 x - 17\lg x + 16 = 0,$$

откуда

$$\lg x = 1\ (\lg x = 16).$$

**Ответ.** $x_1 = 10$.

**572.** Имеем:

$$\frac{1}{3}\lg\left(271 + 3^{\sqrt{2x}}\right) = 2 - \lg 10 = 1,$$

$$\lg\left(271 + 3^{\sqrt{2x}}\right) = 3;\ 271 + 3^{\sqrt{2x}} = 10^3;$$

$$3^{\sqrt{2x}} = 729 = 3^6,\ \sqrt{2x} = 6,\ x = 18.$$

**Ответ.** $x = 18$.

573. $x = 3{,}2 \cdot 5^{\frac{2}{3}}$.

574. $x = 5$.

575. $x_1 = 2$; $x_2 = 4$.

576. По известным формулам находим:

$$\log_x 2 = \log_{x^2} 4 = \frac{1}{\log_4 x^2}.$$

Поэтому заданное уравнение принимает вид:

$$\log_4 (x + 12) = \log_4 x^2,$$

или

$$x^2 - x - 12 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 4 \ (x_2 < 0).$$

**Ответ.** $x = 4$.

577. $x = 9^{-1}$.

578. Логарифмируя, находим:

$$\frac{1}{\lg x} \cdot \lg x = x^4 \lg 10,$$

т. е. $x^4 - 1 = 0$, $(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$;

так как $x^2 + 1 \neq 0$, то $x^2 - 1 = 0$,

откуда

$$x_{1,\,2} = \pm 1.$$

Легко убедиться, что $x_1$ и $x_2$ уравнению не удовлетворяют, следовательно, уравнение корней не имеет.

**Ответ.** Корней нет.

579. У к а з а н и е. Имеем:

$$\log_2 \frac{3^5 (x-2) \sqrt{8}}{27^{\frac{5}{3}}} = \frac{3}{2},$$

или

$$(x-2) \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}.$$

**Ответ.** $x = 3$.

580. $x = -3$.

581. $x = 9$.

582. Воспользуемся соотношением (см. № 502)

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Следовательно, заданное уравнение перепишем так:

$$\frac{1}{\log_2 x} + \log_2 x = 2{,}5,$$

или

$$2\log_2^2 x - 5\log_2 x + 2 = 0,$$

откуда

$$\log_2 x_1 = 2;\ \log_2 x_2 = \frac{1}{2}.$$

**Ответ.** $x_1 = 4;\ x_2 = \sqrt{2}$.

583. $\lg(35 - x^3) = \lg(5 - x)^3$,

$$35 - x^3 = (5 - x)^3,$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = 3.$$

**Ответ.** $x_1 = 2,\ x_2 = 3$.

584. Логарифмируя, находим:

$$\frac{\lg x + 7}{4}\lg x = \lg x + 1,\ \lg^2 x + 3\lg x - 4 = 0,$$

откуда

$$\lg x = 1,\ x_1 = 10,$$
$$\lg x = -4,\ x_2 = 10^{-4}.$$

**Ответ.** $x_1 = 10;\ x_2 = 0{,}0001$.

585. Указание. Возвести обе части в квадрат и воспользоваться тождеством:

$$a^{\log_a N} = N.$$

**Ответ.** $x = \sqrt{26}$.

586. Логарифмируя, находим:

$$(\log_5 x - 1)\cdot\frac{1}{2}\log_5 x = 1,$$

$$\log_5^2 x - \log_5 x - 2 = 0,$$

откуда

$$\log_5 x = -1;\ x = 5^{-1},$$
$$\log_5 x = 2;\ x = 5^2.$$

**Ответ.** $x_1 = 0{,}2,\ x_2 = 25$.

587. Имеем:

$$\lg (x^2 + 21) - 1 = \lg x$$

$$\lg (x^2 + 21) - \lg 10 = \lg x,$$

$$\frac{x^2 + 21}{10} = x,$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0.$$

**Ответ.** $x_1 = 3$, $x_2 = 7$.

588. $\log_2 \log_7 x = \pi^0 = 1$, $\log_7 x = 2$, $x = 7^2$.

**Ответ.** $x = 49$.

589. Имеем:

$$2 \lg \frac{2}{10} + \lg \left(5^{\sqrt{x}} + 1\right) = \lg \frac{1 + 5^{\sqrt{x}}}{5^{\sqrt{x}-1}},$$

$$\lg 5^2 = \lg 5^{\sqrt{x}-1}, \quad 5^2 = 5^{\sqrt{x}-1}, \quad \sqrt{x} - 1 = 2.$$

**Ответ.** $x = 9$.

590. Имеем:

$$\lg 4 + \lg 3^{1+\frac{1}{2x}} = \lg \left(\sqrt[x]{3} + 27\right),$$

$$4 \cdot 3^{1+\frac{1}{2x}} = \sqrt[x]{3} + 27, \quad 4 \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} = 3^{\frac{1}{x}} + 27,$$

$$3^{\frac{1}{x}} - 12 \cdot 3^{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}} + 27 = 0.$$

Обозначим $3^{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}} = z$, тогда $3^{\frac{1}{x}} = z^2$ и последнее уравнение примет вид:

$$z^2 - 12z + 27 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 3; \; x = 0{,}5,$$

$$z_2 = 9; \; x = 0{,}25.$$

**Ответ.** $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}5$.

591. Имеем:

$$\frac{1}{2} \log_x 5 + \log_x 5 + \log_x x - \frac{9}{4} = \frac{1}{4} \log_x^2 5,$$

или

$$\log_x^2 5 - 6 \log_x 5 + 5 = 0,$$

откуда

$$\log_x 5 = 1,\ x = 5,$$
$$\log_x 5 = 5,\ x^5 = 5.$$

**Ответ.** $x_1 = 5,\ x_2 = \sqrt[5]{5}$.

**592.** Имеем:

$$\log_{a^4} x^4 - \log_{a^4} x^2 + \log_{a^4} x = \frac{3}{4},$$

$$\log_{a^4} \frac{x^4 \cdot x}{x^2} = \frac{3}{4},$$

откуда

$$x^3 = a^3;\ x = a.$$

**Ответ.** $x = a$.

**593.** $$\frac{\log_2 x - 1}{\log_2 x - 1} - \log_2 x + \log_2^2 x = 3$$

$$\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0,$$

$$\log_2 x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2},$$

откуда

$$\log_2 x = 2;\ x_1 = 2^2,$$
$$\log_2 x = -1;\ x_2 = 2^{-1}.$$

**Ответ.** $x_1 = 4,\ x_2 = 0{,}5$.

**594.** После преобразования получим квадратное уравнение

$$2x^{2\lg x} - 5x^{\lg x} + 3 = 0,$$

корни которого

$$x^{\lg x} = 1$$

и

$$x^{\lg x} = \frac{3}{2}.$$

Решая первое из полученных уравнений, находим:

$$\lg^2 x = 0,\ x_1 = 1.$$

Решая второе уравнение, имеем:

$$\lg^2 x = \lg \frac{3}{2},\ \lg x = \pm \sqrt{\lg \frac{3}{2}},$$

откуда

$$x_{2,3} = 10^{\pm\sqrt{\lg\frac{3}{2}}}.$$

**Ответ.** $x_1 = 1,\ x_{2,3} = 10^{\pm\sqrt{\lg\frac{3}{2}}}$.

595. Имеем:

$$5^{\lg x} + 5^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} + 3^{\lg x - 1},$$

$$5^{\lg x} \cdot \frac{6}{5} = 3^{\lg x} \cdot \frac{10}{3},$$

$$5^{\lg x} \cdot 3^2 = 3^{\lg x} \cdot 5^2,$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{\lg x} = \left(\frac{5}{3}\right)^2,$$

откуда

$$\lg x = 2;\ x = 10^2.$$

**Ответ.** $x = 100$.

596. Если преобразовать правую часть уравнения, то оно примет вид:

$$x^{\lg^2 x + \lg x^3 + 3} = x.$$

Логарифмируя, находим:

$$(\lg^2 x + \lg x^3 + 3)\lg x = \lg x;$$
$$(\lg^2 x + 3\lg x + 2)\lg x = 0,$$

т. е.

$$\lg x = 0;\ x = 1,$$
$$\lg^2 x + 3\lg x + 2 = 0,$$

откуда

$$\lg x = -2;\ x = 10^{-2},$$
$$\lg x = -1;\ x = 10^{-1}.$$

**Ответ.** $x_1 = 0{,}01,\ x_2 = 0{,}1,\ x_3 = 1$.

597. После очевидных упрощений находим:

$$2^{12} \cdot x^{2\log_2^2 x - 8} = x^6.$$

Логарифмируя по основанию 2 и приведя подобные члены, получим кубическое уравнение

$$\log_2^3 x - 7\log_2 x + 6 = 0,$$

которое легко решить разложением левой части уравнения на множители:

$$z^3 - 7z + 6 = z^3 - z - 6z + 6 = (z - 1)(z^2 + z - 6) = 0,$$

где $z = \log_2 x$.

$$z_1 = 1;\ \log_2 x = 1,\ x = 2;$$
$$z_2 = -3;\ \log_2 x = -3,\ x = 2^{-3};$$
$$z_3 = 2;\ \log_2 x = 2,\ x = 2^2.$$

**Ответ.** $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{8},\ x_3 = 4.$

**598.** Имеем:

$$\log_4 x \left(\frac{\log_2 x}{\log_4 x} + \frac{\log_3 x}{\log_4 x} + 1\right) = 1,$$
$$\log_4 x\,(\log_2 4 + \log_3 4 + 1) = 1,$$
$$\log_4 x\,(3 + \log_3 4) = 1,$$
$$\log_4 x = \frac{1}{3 + 2\log_3 2}.$$

Потенцируя, находим:

**Ответ.** $x = 2^{\frac{2}{3+2\log_3 2}} = 2^{2\log_{10} 8^2}$.

**599.** Имеем:

$$\log_{16} x + \log_{16} x^2 + \log_{16} x^4 = 7,$$
$$\log_{16} x^7 = 7,$$
$$x^7 = 16^7.$$

**Ответ.** $x = 16$.

**600.** Логарифмируя по основанию 10, получим:

$$\lg(\lg\lg x) = \frac{1}{2}[\lg(m-n)\lg(m+n) -$$
$$-\lg(m+n)\lg(m-n)] = 0.$$

следовательно,

$$\lg\lg x = 1,\ \lg x = 10,\ x = 10^{10}.$$

**Ответ.** $x = 10^{10}$.

**601.** $$\sqrt{\frac{1}{4}(1 + \log_a x) + \frac{1}{4}(1 + \log_x a)} +$$
$$+ \sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x - 1) + \frac{1}{4}(\log_x a - 1)} = a.$$

Известно, что $\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$. Используя это соотношение, находим:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1+\log_a x)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\log_a x}\right)}+$$

$$+\sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x-1)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\log_a x}-1\right)}=a,$$

или

$$\sqrt{\frac{(1+\log_a x)^2}{4\log_a x}}+\sqrt{\frac{(\log_a x-1)^2}{4\log_a x}}=a. \qquad (1)$$

Если $\log_a x \geqslant 1$, то $a>1$ и уравнение (1) принимает вид:

$$\log_a x = a\sqrt{\log_a x},$$

откуда

$$\log_a x = a^2,$$

$$x_1 = a^{a^2}.$$

Если $0<\log_a x \leqslant 1$, то $a>1$ и уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{1+\log_a x}{2\sqrt{\log_a x}}-\frac{\log_a x-1}{2\sqrt{\log_a x}}=a,$$

откуда

$$1 = a\sqrt{\log_a x},\quad \log_a x = \frac{1}{a^2},\quad x = a^{\frac{1}{a^2}}.$$

**Ответ.** $x_1 = a^{a^2}$, $x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}$.

**602.** Имеем:

$$\log(kx) = \log(x+1)^2,$$

$$kx = (x+1)^2,$$

$$x^2-(k-2)x+1=0, \qquad (1)$$

$$x_{1,2} = \frac{k-2\pm\sqrt{k(k-4)}}{2}.$$

Для того чтобы корни квадратного уравнения были действительными числами, необходимо и достаточно, чтобы $k(k-4)\geqslant 0$. Последнее выполняется при $k\geqslant 4$ и при $k\leqslant 0$.

1. Если $k>4$, квадратное уравнение (1) имеет два разных положительных корня.

2. Если $k=4$, квадратное уравнение (1) имеет два равных положительных корня $x_{1,2}=1$.

3. Если $k < 0$, квадратное уравнение (1) имеет два разных отрицательных корня. В самом деле, по формулам Виета

$$x_1 + x_2 = k - 2 < 0$$

и

$$x_1 \cdot x_2 = 1.$$

Из последних двух соотношений следует, что корни квадратного уравнения (1) оба отрицательны и обратны по величине.

Итак, заданному уравнению удовлетворяет только одно значение $x = 1$ при $k = 4$.

**Ответ.** Уравнению удовлетворяет единственный положительный корень $x = 1$, при $k = 4$.

**603.** Имеем:

$$\frac{2}{\lg x} + \frac{3}{(\lg x)^2} + \frac{4}{(\lg x)^3} + \cdots + \frac{n}{(\lg x)^{n-1}} + \frac{n+1}{(\lg x)^n} + \cdots = 8, \qquad (1)$$

или (учитывая, что $\lg x > 1$)

$$\frac{2}{(\lg x)^2} + \frac{3}{(\lg x)^3} + \frac{4}{(\lg x)^4} + \cdots + \frac{n+1}{(\lg x)^{n+1}} + \cdots = \frac{8}{\lg x}. \qquad (2)$$

Вычитая из соотношения (1) соотношения (2), после очевидных преобразований, находим:

$$\frac{1}{(\lg x)^2} + \frac{1}{(\lg x)^3} + \frac{1}{(\lg x)^4} + \cdots + \frac{1}{(\lg x)^n} + \cdots = 8 - \frac{10}{\lg x}.$$

По формуле бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{\dfrac{1}{(\lg x)^2}}{1 - \dfrac{1}{\lg x}} = 8 - \frac{10}{\lg x},$$

откуда

$$\lg x = \frac{3}{2} \left( \lg x = \frac{3}{4} \right).$$

**Ответ.** $x = 10\sqrt{10}$.

### г) Системы уравнений

**604.** Перепишем данные уравнения так:

$$2^x (3 - 2^y) = -2$$

$$2^x (10 - 2^y \cdot 2^{-1}) = 16.$$

Разделив почленно одно равенство на другое, после упрощения находим $2^y = 4$, откуда $y = 2$; $x = 1$.

**Ответ.** $x = 1$; $y = 2$.

605. Из второго уравнения определяем:

$$x + y = 3 \cdot 2^{x-y}, \qquad (A)$$

и, подставив значение $x + y$ в первое уравнение, имеем:

$$\sqrt[x-y]{3 \cdot 2^{x-y}} = 2\sqrt{3}, \quad 3^{\frac{1}{x-y}} = 3^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{2}, \quad x - y = 2.$$

Из уравнения (А) находим, что

$$x + y = 12.$$

**Ответ.** $x = 7$; $y = 5$.

**606.** $x = y = \frac{1}{p}$.

**607.** Складывая почленно уравнения, находим:

$$\lg x = 6, \quad x = 10^6,$$

следовательно,

$$\lg y = -1, \quad y = 0{,}1.$$

**Ответ.** $x = 10^6$; $y = 0{,}1$.

**608.** Решение аналогично предыдущему.

**Ответ.** $x = 10^{\frac{2a+b}{4}}$; $y = 10^{\frac{2a-b}{4}}$.

**609.** Потенцируя первое уравнение, находим:

$$xy = 2.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2, \end{cases}$$

находим:

**Ответ.** $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$.

**610.** Решение аналогично предыдущему.

**Ответ.** $x_1 = 5$, $y_1 = 20$; $x_2 = 20$ $y_2 = 5$.

**611.** Из второго уравнения находим $y = 5 - x$; подставляя его в первое, имеем:

$$2^x + 2^{5-x} = 12$$

или

$$2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0,$$

откуда

$$2^x = 8;\ 2^x = 4.$$

**Ответ.** $x_1 = 3,\ y_1 = 2;\ x_2 = 2,\ y_2 = 3.$

**612.** Умножая второе уравнение на 2 и учитывая первое, получим:

$$8^x = 2 \cdot 2^x;\ 2^{3x} = 2^{x+1},$$

откуда

$$3x = x + 1.$$

**Ответ.** $x = \frac{1}{2},\quad y = \frac{\sqrt{2}}{5}.$

**613.** Логарифмируя, получим:

$$\begin{cases} (y+1)\lg x = 3\lg 3 \\ (2y-5)\lg x = -\lg 3, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{y+1}{2y-5} = -3,$$

**Ответ.** $x = 3,\ y = 2.$

**614.** Перепишем первое уравнение так:

$$\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^2 - \left(2^{\frac{y^2}{2}}\right)^2 = 77.$$

При делении этого уравнения на второе получим уравнение, которое со вторым дает систему:

$$\begin{cases} 3^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{y^2}{2}} = 11 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7, \end{cases}$$

откуда

$$3^{\frac{x}{2}} = 9,\ x = 4$$

и

$$2^{\frac{y^2}{2}} = 2,\ y = \pm\sqrt{2}.$$

**Ответ.** $x_1 = 4,\ y_1 = \sqrt{2};\ x_2 = 4,\ y_2 = -\sqrt{2}.$

**615.** Находим: $x = y^{\frac{x}{y}}$, $x^m = y^{\frac{mx}{y}}$ (1)

Сравнивая правые части полученного равенства и второго уравнения, получим:

$$y^n = y^{\frac{mx}{y}}.$$

Отсюда или $y = 1$, или $\frac{mx}{y} = n$, т. е. $y = \frac{mx}{n}$. (2)

Если $y = 1$, то $x = 1$.

Кроме того, подставляя значение $y$ из равенства (2) во второе уравнение системы, находим:

$$x^m = x^n \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^n$$

или

$$x^{m-n} = \left(\frac{m}{n}\right)^n,$$

откуда и находим значение $x$.

**Ответ.** $x = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}}$, $y = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}}$.

**616.** Указание. Решение аналогично предыдущему.

**Ответ.** $x_1 = 1$, $y_1 = 1$; $x_2 = 4$, $y_2 = 2$.

**617.** Решение 1-е. Логарифмируя второе уравнение, находим:

$$x \log a = y \log b. \quad (1)$$

Пусть $x = b^t$, $y = a^z$; тогда уравнение запишем так:

$$b^{yt} = a^{xz}.$$

Заменяя из второго уравнения $b^y = a^x$, находим:

$$a^{xt} = a^{xz},$$

откуда

$$xt = xz, \; x(t - z) = 0,$$

т. е. или $x = 0$ или $z = t$.

При $x = 0$, $y = 0$ решение не удовлетворяет условию задачи; при $z = t$ имеем:

$$x = b^z, \; y = a^z. \quad (2)$$

Заменяя в равенстве (1) значения $x$ и $y$, из соотношений (2) находим:

$$b^z \log a = a^z \log b,$$

т. е.

$$\left(\frac{b}{a}\right)^z = \frac{\log b}{\log a},$$

откуда

$$z = \frac{\log \frac{\log b}{\log a}}{\log \frac{b}{a}} = \frac{\log \frac{\log b}{\log a}}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\log \frac{b}{a}}.$$

Учитывая, что отношение логарифмов двух чисел не зависит от выбора основания, будем иметь

$$b^{\frac{\log \frac{\log b}{\log a}}{\log b}} = b^{\frac{\log_b \frac{\log b}{\log a}}{\log_b b}} = \frac{\log b}{\log a};$$

$$x = b^z = b^{\frac{\log \frac{\log b}{\log a}}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\log \frac{b}{a}}} = \left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log b}{\log \frac{b}{a}}}.$$

Следовательно, если $\frac{\log b}{\log a} > 0$, то

$$x = \left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log b}{\log \frac{b}{a}}}.$$

Аналогично

$$y = \left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log a}{\log \frac{b}{a}}}.$$

Если $\frac{\log b}{\log a} < 0$, уравнения решений не имеют.

Р е ш е н и е 2-е. Имеем:

$$y \log x = x \log y, \tag{1}$$

$$x \log a = y \log b. \tag{2}$$

Исключая $y$, находим:

$$\frac{\log y}{\log x} = \frac{\log a}{\log b}. \tag{3}$$

Логарифмируя соотношение (2) еще раз ($\log a > 0$, $\log b > 0$) получим:

$$\log x - \log y = \log\log b - \log\log a \qquad (4)$$

Решая систему линейных уравнений (3) и (4) относительно $\log x$ и $\log y$, находим ответ, если $\frac{\log b}{\log a} > 0$.

**618.** Здесь $x > 0$ и $y > 0$. Логарифмируя, находим

$$\begin{cases} y \lg x = x \lg y \\ 3 \lg x = 2 \lg y. \end{cases}$$

Пусть $\lg x \neq 0$ и $\lg y \neq 0$. При почленном делении двух уравнений получим:

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{2}, \quad y = \frac{3}{2} x.$$

Подставляя значение $y$ во второе уравнение системы, получим:

$$x^3 = \frac{9}{4} x^2.$$

откуда

$$x = \frac{9}{4}; \quad y = \frac{27}{8}.$$

Кроме этого, данная система имеет очевидные корни

$$x = y = 1.$$

**Ответ.** $x_1 = y_1 = 1$; $x_2 = \frac{9}{4}$, $y_2 = \frac{27}{8}$.

**619.** Указание. Имеем:

$$\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 40 \\ 64^{2x} \cdot 64^{2y} = 144. \end{cases}$$

По формулам Виета получим:

$$z^2 - 40z + 144 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 36, \; z_2 = 4,$$

т. е.

$$\begin{cases} 64^{2x} = 36 \\ 64^{2y} = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} 64^{2x} = 4 \\ 64^{2y} = 36. \end{cases}$$

Решая эти две системы уравнений, находим неизвестн

**Ответ.** $x_1 = \frac{\lg 6}{\lg 64}$, $y_1 = \frac{1}{6}$;

$$x_2 = \frac{1}{6}, \quad y_2 = \frac{\lg 6}{\lg 64}.$$

**620.** Указание. Обозначая $64^{2x} = u$, $64^{2y} = v$, находим:

$$u + v = 12$$

$$uv = 32.$$

**Ответ.** $x_1 = \frac{1}{4}$, $y_1 = \frac{1}{6}$; $x_2 = \frac{1}{6}$, $y_2 = \frac{1}{4}$.

**621.** Имеем:

$$243 = 3^5;\ 1024 = 2^{10};\ x > 0,\ y > 0.$$

Логарифмируя уравнения по основанию 3, находим:

$$\begin{cases} y \log_3 x = 5 \\ \frac{10}{y} \log_3 2 = 2 \log_3 2 + 2 \log_3 x - 2. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, получим:

$$\log_3 x (\log_3 2 - 1) = \log_3 2 - 1;$$

$$(\log_3 2 - 1)(\log_3 x - 1) = 0;$$

$$\log_3 x = 1;\ x = 3;\ y = 5.$$

**Ответ.** $x = 3$, $y = 5$.

**622.** Преобразуем заданные уравнения так:

$$5^{\frac{6xy}{9}} = 5^8,\ xy = 12;$$

$$7777^{(x-y-1)(x^2+6y^2-60)} = 7777^0;$$

$$(x - y - 1)(x^2 + 6y^2 - 60) = 0,$$

откуда

$$x - y - 1 = 0,$$

$$x^2 + 6y^2 - 60 = 0.$$

Получим две системы уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 6y^2 = 60 \\ xy = 12 \end{cases}$$

**Ответ.** $x_1 = -3$, $y_1 = -4$; $x_2 = 4$, $y_2 = 3$; $x_{3,4} = \pm 6$, $y_{3,4} = \pm 2$; $x_{5,6} = \pm 2\sqrt{6}$, $y_{5,6} = \pm \sqrt{6}$.

**623.** Указание. Имеем:

$$2 - \lg(x - y) = \lg 25$$
$$\lg(x^2 - y^2) = \lg 40.$$

откуда

$$x - y = 4,$$
$$x^2 - y^2 = 40.$$

Решая эту систему уравнений, получим $x$ и $y$.

**Ответ.** $x = 7$, $y = 3$.

**624.** Логарифмируя первое уравнение, находим:

$$\lg m(\lg m + \lg x) = \lg n(\lg n + \lg y),$$

или

$$\lg m \lg x - \lg n \lg y = \lg^2 n - \lg^2 m. \quad (1)$$

Логарифмируя второе уравнение, получим:

$$\lg n \cdot \lg x - \lg m \lg y = 0. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), получим:

$$\lg x = -\lg m;\ \lg x = \lg m^{-1};$$
$$\lg y = -\lg n;\ \lg y = \lg n^{-1}.$$

**Ответ.** $x = \frac{1}{m}$, $y = \frac{1}{n}$.

**625.** Упростим первое уравнение:

$$10^{\lg 1000 - \lg(x-y)} = 250;\ 10^{\lg \frac{1000}{x-y}} = 250;$$
$$\frac{1000}{x-y} = 250,\ x - y = 4.$$

Подставляя значение $x - y$ во второе уравнение, после упрощения находим:

$$y^2 - 46y + 480 = 0,$$

откуда

$$y_1 = 16,\ y_2 = 30$$

**Ответ.** $x_1 = 20$, $y_1 = 16$.

**626.** Потенцируя второе уравнение, получим:

$$(x - y)^2 = 4,$$

т. е.

$$x - y = \pm 2,$$

следовательно,

$$y = x + 2.$$
$$y = x - 2.$$

Подставляя в первое уравнение значение $y = x + 2$, имеем:

$$2^x \cdot 4^{x+2} = 32, \quad 2^{3x} \cdot 2^4 = 2^5,$$

откуда

$$x_1 = \frac{1}{3}; \quad y_1 = \frac{7}{3}.$$

Подставляя в это же уравнение $y = x - 2$, имеем

$$2^{3x} = 2^9,$$

откуда

$$x_2 = 3; \; y_2 = 1.$$

**Ответ.** $x_1 = \frac{1}{3}, \quad y_1 = \frac{7}{3}; \quad x_2 = 3, \; y_2 = 1.$

**627.** Потенцируя данные уравнения, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ \dfrac{x+y}{x-y} = 8. \end{cases}$$

Решая ее, находим ответ: $x_1 = 9$, $y_1 = 7$.

Отрицательные корни $x_2 = -9$; $y_2 = -7$ заданному уравнению не удовлетворяют.

**628.** Известно, что

$$\log_x y = \frac{1}{\log_y x};$$

поэтому первое уравнение принимает вид:

$$\log_y^2 x - 2 \log_y x + 1 = 0,$$

откуда

$$\log_y x = 1.$$

Следовательно,

$$y = x.$$

Подставляя значение $y$ во второе уравнение, находим:

$$x = y = 3.$$

**Ответ.** $x = y = 3$.

**629.** $x = 2$, $y = 6$.

**630.** Воспользуемся формулой

$$\log_y x = \frac{1}{\log_x y};$$

преобразуем первое уравнение к виду

$$3 \log_x^2 y + 8 \log_x y - 3 = 0,$$

откуда

$$\log_x y = \frac{1}{3}, \text{ т. е. } y = x^{\frac{1}{3}},$$

и

$$\log_x y = -3, \text{ т. е. } y = x^{-3}.$$

Подставляя эти значения во второе уравнение, имеем:

$$x^{\frac{4}{3}} = 16,$$
$$x^{-2} = 16.$$

**Ответ.** $x_1 = \frac{1}{4}$, $y_1 = 64$; $x_2 = 8$, $y_2 = 2$.

**631.** $x_1 = 2$, $y_1 = 32$; $x_2 = 32$, $y_2 = 2$.

**632.** Потенцируя данные уравнения, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 40 \\ xy = 21, \end{cases}$$

решив которую, находим ответ: $x = 7$, $y = 3$.

**633.** Потенцируя данные уравнения, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = a^2b\,(3a + 2b) \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{a^2b^3}{2a + 3b}, \end{cases}$$

решая которую, находим значения $x$ и $y$.

**634.** Применяя формулу $\log_a N = \log_{a^2} N^2$, заданную систему уравнений легко преобразовать к виду:

$$\begin{cases} \log_4 x^2 + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_9 y^2 + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_{16} z^2 + \log_{16} x + \log_{16} y = 2, \end{cases} \tag{1}$$

или

$$\begin{cases} x^2yz = 4^2 \\ y^2xz = 9^2 \\ z^2xy = 16^2. \end{cases} \tag{2}$$

В результате почленного умножения системы уравнений (2) и соответствующих преобразований находим, что

$$xyz = 24. \tag{3}$$

так как $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

При делении каждого из уравнений системы уравнений (2) на соотношение (3) находим искомые величины.

**Ответ.** $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{27}{8}$, $z = \frac{32}{3}$.

**635.** Потенцируя первое уравнение, находим:

$$xy = \frac{9a^2}{4}.$$

Решая полученное уравнение со вторым как систему, находим искомое.

**Ответ.** $x_1 = \frac{9a}{2}$, $y_1 = \frac{a}{2}$; $x_2 = \frac{a}{2}$, $y_2 = \frac{9a}{2}$.

**636.** $x = p^{\frac{n^2}{m(n-m)}}$, $y = p^{\frac{n}{n-m}}$.

## § 11. СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

**637.** Имеем:

$$C_n^k = C_n^{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}.$$

По данному соотношению делаем вывод, что число сочетаний из $n$ элементов, взятых по $k$, будет возрастать, если множитель

$$\frac{n-k+1}{k} > 1, \text{ откуда } k < \frac{n+1}{2}.$$

При $n$ четном $k = \frac{n}{2}$.

При $n$ нечетном $k_1 = \frac{n-1}{2}$ и $k_2 = \frac{n+1}{2}$.

В самом деле, обозначим $n = 2p + 1$, откуда $p = \frac{n-1}{2}$; кроме того,

$$k < \frac{2p+1}{2} + \frac{1}{2} = p + 1,$$

т. е.

$$k \leqslant p + 1,$$

поэтому для наибольшего числа сочетаний

$$k = p = \frac{n-1}{2},$$

но

$$C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{n-\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}},$$

что и требовалось доказать.

**638.** Указание. Очевидно, это будет наибольшее число точек пересечения прямых линий, т. е. $C_n^2$.

**639.** Число всех прямых, проходящих через $n$ точек на плоскости, равно $C_n^2$, а число прямых, проходящих через $n-2$ точки, равно $C_{n-2}^2$.

Каждая из прямых, проходящая через две любые из заданных точек, будет пересекаться всеми прямыми, проходящими через остальные $n-2$ точки, поэтому на каждой прямой будет находиться $C_{n-2}^2$ точек пересечения; исходя из того, что одно пересечение принадлежит двум прямым одновременно, находим:

$$N = \frac{1}{2} C_n^2 \cdot C_{n-2}^2.$$

**Ответ.** $N = \frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3)$.

**640.** 10.

**641.** $C_{15}^3 = 455$.

**643.** $C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} =$

$$= \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)}{n!} +$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(m-1)!} =$$

$$= \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}(m-n+n) =$$

$$= \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} = C_m^n.$$

Следовательно,

$$C_{m-1}^n = C_{m-2}^n + C_{m-2}^{n-1}$$

$$C_{m-1}^{n-1} = C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2}.$$

Складывая почленно последние два равенства, находим:

$$C_m^n = C_{m-2}^n + 2C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2},$$

что и требовалось доказать.

**644.** $81^n = 9^{2n} = (10-1)^{2n} =$

$$= 1 - 10C_{2n}^1 + 10^2 C_{2n}^2 - \cdots - 10^{2n-1} C_{2n}^1 + 10^{2n}.$$

**645.** По условию $C_n^2 : C_n^1 = 11 : 2$, откуда $n = 12$.

Пятый член разложения заданного бинома

$$T_5 = C_{12}^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^4 \left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^8.$$

**Ответ.** $T_5 = 495a^4x^{-2}$.

**646.** По условию $C_n^2 = 28$, откуда $n = 8$.

Всех членов в разложении данного бинома 9, поэтому средний член будет пятым

$$T_5 = (-1)^4 C_8^4 (\sqrt{1-x})^4 (\sqrt{1+x})^4.$$

**Ответ.** $T_5 = 70(1-x^2)^2$.

**647.** $T_4 = 35 \dfrac{(b+a)\,a}{(b-a)^3}$.

**648.** Указание. Задача невозможна, так как коэффициенты разложения бинома являются целыми числами.

**649.** Указание. $C_n^4 = C_n^8 = C_n^{n-8}$,

откуда $n - 8 = 4$, $n = 12$.

**Ответ.** 12.

**650.** Имеем:

$$C_m^k : C_m^{k+1} = 7 : 15,$$

т. е.

$$\frac{k+1}{m-k} = \frac{7}{15},$$

$$7m - 22k = 15,$$

откуда

$$m = \frac{22k + 15}{7}.$$

По условию искомое число $m$ должно быть целым, положительным и наименьшим. Это условие выполняется при $k = 6$.

**Ответ.** $m = 21$.

**651.** $T_3 = C_5^2 y^2$.

**652.** Известно, что сумма всех биномиальных коэффициентов разложения $(x+y)^n$ равна $2^n$; поэтому

$$2^n = 2 \cdot 2048,$$

откуда

$$n = 12.$$

Воспользуемся формулой общего члена бинома; имеем:

$$T_{k+1} = (-1)^k C_{12}^k \left(\frac{b}{\sqrt[7]{a^3}}\right)^k \left(a \sqrt[5]{\frac{a}{3}}\right)^{12-k} =$$

$$= (-1)^k C_{12}^k b^k 3^{\frac{k-12}{5}} a^{\frac{6(12-k)}{5} - \frac{3k}{7}}.$$

По условию

$$a^{\frac{6(12-k)}{5}-\frac{3k}{7}}=a^3,$$

т. е. $\frac{6(12-k)}{5}-\frac{3k}{7}=3$, $k=7$.

Зная $n$ и $k$, легко найти искомое.

**Ответ.** $T_8=-264a^3b^7$

**653.** $T_6=C_{12}^5b^{-7}$.

**654.** Указание. По условию составляем уравнение:

$$C_n^3\ C_n^1=187.$$

из которого находим $n=35$.

Дальнейшее решение аналогично № 652.

**655.** Воспользуемся формулой общего члена бинома Ньютона:

$$T_{k+1}=C_5^k\left(\sqrt[3]{3}\right)^{5-k}(\sqrt{2})^k=C_5^k3^{\frac{5-k}{3}}2^{\frac{k}{2}}$$

Члены бинома будут рациональными, если показатели степеней $\frac{5-k}{3}$ и $\frac{k}{2}$ — целые положительные числа. По условию $k\leqslant 5$ и $k$ — число четное, так как оно делится без остатка на 2. Такое число только одно: 2. Следовательно, в данном разложении бинома искомый член только один.

**Ответ.** $T_3=C_5^2\left(\sqrt[3]{3}\right)^3(\sqrt{2})^2=60$.

**656.** Биномиальные коэффициенты разложения

$$C_n^1,\ C_n^2,\ C_n^3,$$

т. е.

$$n,\ \frac{n(n-1)}{1\cdot2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3},$$

по условию составляют арифметическую прогрессию; поэтому

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot2}-n=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}-\frac{n(n-1)}{1\cdot2},$$

или

$$n^2-9n+14=0,$$

отсюда $n_1=7$ ($n_2=2$).

**Ответ.** $n=7$.

**657.** Указание. Общий член разложения бинома

$$T_{k+1} = C_{12}^k x^{-\frac{1}{2}(12-k)} x^{\frac{k}{3}} = C_{12}^k x^{\frac{5}{6}k-6}.$$

Показатель степени $\frac{5}{6}k - 6$ будет целым числом при $k = 0, 6, 12$ ($k \leqslant 12$).

**Ответ.** $x^{-6}$, $C_{12}^6 x^{-1}$, $x^4$.

**658.** Указание. $C_n^{k+1} - C_n^k = C_n^{k+2} - C_n^{k+1}$, где $n > k$ (см. решение № 656).

**659.** Разложим это выражение по формуле бинома:

$$1{,}0005^{36} = (1 + 0{,}0005)^{36} = 1 + 36 \cdot 0{,}0005 + \\ + \frac{36 \cdot 35}{2} \cdot 0{,}0005^2 + \cdots$$

Первые два члена разложения бинома дают 1,018. Рассматривая 3-й член разложения бинома, находим, что он меньше 0,0002, а потому не может влиять на результат вычисления; точно так же не влияют на него и последующие члены бинома; следовательно, достаточно взять 2 члена в разложении данного бинома.

**Ответ.** $1{,}0005^{36} \approx 1{,}018$.

**660.** $2a^6 - 30a^4b^2 + 30a^2b^4 - 2b^6$.

**661.** $(1 + 2)^7$.

**662.** $T_5 = 715 (1 - z)^2 (1 + z)^4 \sqrt{1 + z}$.

**663.** $T_7 = C_{15}^6 a^0$.

**664.** Один член $T_{15} = C_{24}^{14} 3^2 \cdot 2^2$.

**666.** $T_9 = 495$.

**667.** Общий член разложения

$$T_{k+1} = C_{100}^k (\sqrt{2})^{100-k} \left(\sqrt[4]{3}\right)^k = C_{100}^k 2^{50} \cdot 2^{-\frac{k}{2}} \cdot 3^{\frac{k}{4}}$$

Для того чтобы члены данного разложения бинома были рациональными числами, необходимо и достаточно, чтобы число $k$ делилось на 4. Искомое число $k$ удовлетворяет неравенству: $0 \leqslant k \leqslant 100$. Числа $k$, кратные 4, будут: 0, 4, 8, . . ., 96, 100.

Количество таких чисел $n$ находим по формуле

$$100 = 0 + 4(n - 1),$$

откуда всех чисел, кратных четырем, будет $n = 26$.

**Ответ.** 26 членов.

668. Общий член разложения данного бинома имеет вид:

$$T_{k+1} = C_{13}^{k}\left(\sqrt[4]{a^2x}\right)^{13-k}\cdot\left(\sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}}\right)^{k}.$$

Если член разложения бинома не содержит $x$, то

$$\left(\sqrt[4]{x}\right)^{13-k}\cdot\left(\sqrt[5]{\frac{1}{x^2}}\right)^{k} = x^0;$$

$$x^{\frac{13-k}{4}-\frac{2k}{5}} = x^0,\ \frac{13-k}{4}-\frac{2k}{5}=0,\ k=5.$$

**Ответ.** $T_6$.

669. Имеем:

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^{n} = x^{\frac{n}{2}}+\frac{n}{2}x^{\frac{n-1}{2}-\frac{1}{4}}+$$

$$+\frac{n(n-1)}{8}x^{\frac{n-2}{2}-\frac{1}{2}}+\ldots$$

По условию три первых коэффициента в разложении бинома образуют арифметическую прогрессию, поэтому числа

$$1,\ \frac{n}{2}\ \text{и}\ \frac{n(n-1)}{8}$$

удовлетворяют условию

$$n=\frac{n(n-1)}{8}+1,$$

или

$$n^2-9n+8=0,$$

откуда

$$n_1=8\ (n_2=1).$$

Составим общий член разложения бинома, для которого

$$T_{k+1}=C_8^k\left(\sqrt{x}\right)^k\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^{8-k}=2^{k-8}C_8^k x^{\frac{k+8}{4}}.$$

Рациональными будут те члены разложения, для которых $\frac{k+8}{4}$ целое положительное число. Это условие выполняется при $k=0,\ 4,\ 8$.

**Ответ.** $T_1$, $T_5$ и $T_9$.

**670.** Третий член разложения бинома

$$10 \cdot x^{3+2\lg x} = 1\,000\,000$$

Упрощая и логарифмируя, находим:

$$2\lg^2 x + 3\lg x - 5 = 0,$$

откуда

$$\lg x = 1;\ x_1 = 10,$$

$$\lg x = -\frac{5}{2};\quad x_2 = 10^{-\frac{5}{2}}.$$

**Ответ.** $x_1 = 10;\ x_2 = 10^{-\frac{5}{2}}$.

**671.** Указание. Имеем:

$$T_{k+1} = (-1)^k C_{2n+1}^k \cdot x^{3(2n+1-k)} \cdot x^{-2k} = (-1)^k C_{2n+1}^k \cdot x^{6n-5k+3}.$$

По условию

$$4p + 3 = 6n - 5k + 3,$$

или

$$k = \frac{6n-4p}{5} = 2\left(\frac{3n-2p}{5}\right),$$

откуда следует, что число $k$ должно быть целым положительным и четным при некоторых значениях $n$ и $p$, а также удовлетворять условию задачи.

**Ответ.** $C_{2n+1}^{2\left(\frac{3n-2p}{5}\right)}$.

**672.** Рассмотрим два тождества:

$$(x+1)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^n,$$

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n.$$

Перемножим почленно два эти равенства. В левой части будет $(1+x)^{2n}$; разлагая его по формуле бинома Ньютона, определим коэффициент при $x^n$. Он равен $C_{2n}^n$.

В правой части, после перемножения всех членов, находим коэффициенты при $x^0$, $x$, ..., $x^n$, ..., $x^{2n}$. При $x^n$ коэффициент равен выражению

$$1 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2,$$

т. е. сумме квадратов коэффициентов бинома Ньютона.

Но правые и левые части тождественно равны, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях $x$ у них также равны, т. е.

$$1 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^k)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

**673.** Обозначая заданное произведение символом $\Pi_n$, имеем:

$$\Pi_n = x^n + S_n^1 x^{n-1} + S_n^2 x^{n-2} + \cdots,$$

где искомые коэффициенты

$$S_n^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}. \quad (1)$$

$$S_n^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^3} + \cdots$$

Чтобы вычислить коэффициент $S_n^2$ при $x^{n-2}$, который равен сумме произведений всех вторых членов биномов, взятых по два, возьмем равенство (1) и возвысим обе его части в квадрат, получим:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}} + 2S_n^2 = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2,$$

т. е.

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{1 - \frac{1}{4}} + 2S_n^2 = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{2n}},$$

откуда

$$1 - \frac{1}{2^{2n}} + 6S_n^2 = 3 - \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{3}{2^{2n}},$$

$$S_n^2 = \frac{2^{2n} - 3\cdot 2^n + 1}{3\cdot 2^{2n}}.$$

**Ответ.** $S_n^1 = 1 - \frac{1}{2^n}$; $S_n^2 = \frac{2^{2n} - 3\cdot 2^n + 1}{3\cdot 2^{2n}}$.

**674.** Сделаем следующие преобразования:

$$(1 + i)^{4k+2} = [(1 + i)^2]^{2k+1} = (2i)^{2k+1}.$$

Известно, что $i$ в нечетной степени равно $+i$ или $-i$. Следовательно, в заданном разложении остались только мнимые слагаемые; все вещественные слагаемые сократились. Из преобразования видим, что вещественные члены разложения стоят на нечетных местах. Итак, сумма членов разложения, стоящих на нечетных местах, равна нулю.

## § 12. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

**676.** 200.
**678.** 1.
**679.** 1,2.
**680.** 34.
**682.** $x = 4{,}5$.

**684.** а) $0{,}333\cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots$

Данная дробь является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $u_1 = \frac{3}{10}$, $q = \frac{1}{10}$. По формуле (стр. 495) $S = \frac{1}{3}$.

в) Решение аналогичное.

**Ответ.** $0{,}2\,(7) = \frac{5}{18}$.

**687.** В троичной.

**690.** 144.

**691.** 24.

**692.** 243.

**693.** Дробь непериодическая.

**694.** 312 руб.; 330 руб.; 288 руб. и 300 руб.

**695.** 6400; 9600; 12 000; 14 000.

**696.** 183 руб. и 217 руб.

**697.** Через 25 дней.

**698.** 28 и 21.

**700.** Иван женат на Марье, Петр — на Анне.

**703.** Обозначим заданные $n$ чисел — $a_1$, $a_2$, $a_3$, . . ., $a_n$. По условию их сумма известна, следовательно, известно и их среднее арифметическое

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}.$$

Но среднее арифметическое двух или нескольких положительных чисел не меньше их среднего геометрического (см. № 378 и 389):

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Равенство возможно только в том случае, когда $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$, следовательно, произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n$ в этом случае будет наибольшим, что и требовалось доказать.

**705.** Перепишем данное выражение так:

$$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}},$$

или

$$x_n^2 = 2 + x_{n-1}.$$

Переменная величина $x_n$, с увеличением $n$ возрастает, оставаясь меньше некоторого постоянного числа. В самом деле,

$$x_{n-1}^2 - x_{n-1} - 2 < 0, \quad (x_{n-1} < x_n),$$

откуда

$$(x_{n-1} + 1)(x_{n-1} - 2) < 0.$$

Из последнего соотношения следует, что $x_{n-1} + 1 > 0$, поэтому $x_{n-1} - 2 < 0$, т. е. $x_{n-1} < 2$. Но если возрастающая переменная вели-

чина ограничена, то она имеет предел. Обозначая $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1} = z$), находим уравнение

$$z^2 - z - 2 = 0,$$

откуда $z_1 = 2$, $z_2 = -1$. Здесь отрицательный корень посторонний, так как $x_n > 0$.

**Ответ.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

706. $x = 4$.

707. $x = 625$.

708. $x = \frac{1}{2}$.

709. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

для которого $x_1$ является целым корнем. Имеем:

$$a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + a_2x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x_1 + a_n = 0,$$

т. е.

$$x_1\left(a_0x_1^{n-1} + a_1x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\right) = -a_n,$$

или

$$a_0x_1^{n-1} + a_1x_1^{n-2} + a_2x_1^{n-3} + \cdots + a_{n-1} = -\frac{a_n}{x_1}.$$

Левая часть полученного равенства есть целое число, поэтому коэффициент $a_n$ делится на $x_1$, т. е. $x_1$ является делителем свободного члена данного уравнения, что и требовалось доказать.

**713.** Указание. Обозначим искомое число $10x + 6$, где $x$ — число десятков в искомом числе. По условию задачи имеем:

$$4(10x + 6) = 6 \cdot 10^n + x$$

или

$$13x = 2(10^n - 4),$$

где $n$ — целое положительное число. Из последнего соотношения следует, что $10^n - 4$ делится на 13; подбираем такое наименьшее натуральное число $n$, которое удовлетворяет условию.

**Ответ.** 153 846.

Часть II

# ГЕОМЕТРИЯ

## § 13. ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

**715.** Построим треугольник $ABC$ по трем сторонам и, дополнив его до параллелограмма, найдем (рис. 2):

$(2m_b)^2 + b^2 = 2a^2 + 2c^2$,

откуда

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

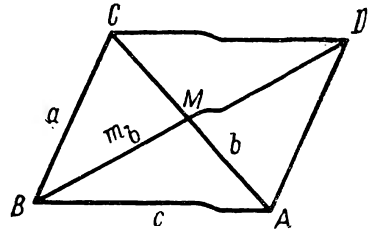



Рис. 2.

По аналогии находим

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2},$$

где $m_a$, $m_b$ и $m_c$ — искомые медианы.

**717.** Построим треугольник $ABC$, у которого $AN = m_a$, $BL = m_b$ и $CM = m_c$ (рис. 3), и продолжим одну из медиан, например $BL$, на отрезок $LD = OL$. Соединив точку $D$ с точками $A$ и $C$, получим параллелограмм $AOCD$; находим соотношение

$$b^2 = 2\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 - \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2,$$

откуда

$$b = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}.$$

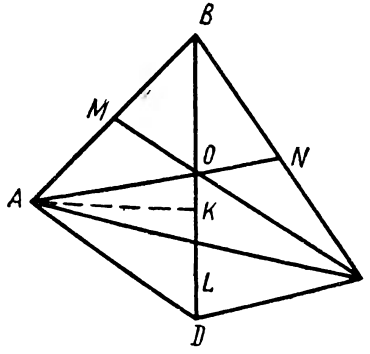



Рис. 3.

Аналогично находим:

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}, \quad c = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}.$$

**718.** 3 : 4.

**719.** $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ и т. д.,

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

**720.** Известно, что в любом треугольнике стороны обратно пропорциональны соответствующим высотам, т. е.

$$a : b : c = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 4 : 6 : 3.$$

Отсюда $3 + 4 \geqslant 6$, $6 - 4 \leqslant 3$.

**Ответ.** Треугольник возможен.

**721.** Дано: $b$, $c$, $b'$ и $c'$. Доказать: $\beta_A^2 = bc - b'c'$.

В треугольнике $ABC$ биссектриса угла $A$ делит сторону $a = BC$ на отрезки $b'$ и $c'$ (рис. 4).

Для доказательства теоремы опишем окружность около треугольника $ABC$, продолжим биссектрису до пересечения ее в точке $N$ с окружностью и соединим точку $N$ с $B$.

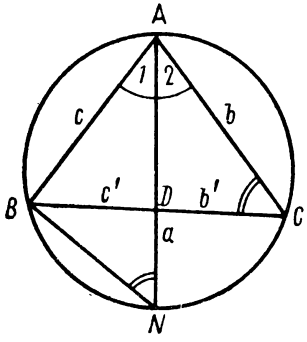


Рис. 4.

Из подобия треугольников $ABN$ и $ADC$ ($\angle 1 = \angle 2$ и $\angle C = \angle N$) находим:

$$\beta_A : c = b : (\beta_A + DN),$$

или

$$\beta_A^2 + \beta_A \cdot DN = bc,$$

но

$$\beta_A \cdot DN = b' \cdot c'$$

как произведение двух пересекающихся в точке $D$ хорд. Из двух последних равенств находим

$$\beta_A^2 = bc - b'c',$$

что и требовалось доказать.

**722.** В предыдущей задаче найдено, что

$$\beta_A^2 = bc - b'c'.$$

Известно, что отрезки $b'$ и $c'$ пропорциональны соответствующим сторонам $b$ и $c$, т. е.

$$b' = nb, \quad c' = nc,$$

при этом коэффициент пропорциональности определяется из условия

$$nb + nc = a,$$

или

$$n = \frac{a}{b+c}.$$

Следовательно,

$$b'c' = n^2 bc = \frac{a^2 bc}{(b+c)^2},$$

поэтому

$$\beta_2^A = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2},$$

откуда и находим искомую длину биссектрисы

$$\beta_A = \frac{\sqrt{bc\,[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c}.$$

**723.** $\beta_c = \dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

**724.** У к а з а н и е. Можно воспользоваться формулами задачи № 717, учитывая, что искомая третья сторона треугольника

$$c^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 (m_a^2 + m_b^2).$$

**Ответ.** $c = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{5}}$.

**726.** Составим равенства:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2},$$

$$h_c = h_a + h_b,$$

откуда

$$c = \frac{2S}{h_a + h_b},$$

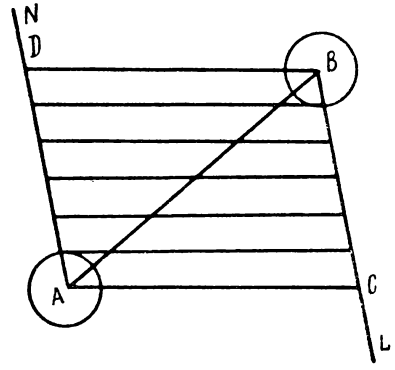



Рис. 5.

где $S$ — площадь треугольника.

Заменяя в последнем выражении $h_a = \dfrac{2S}{a}$ и $h_b = \dfrac{2S}{b}$, находим

**Ответ.**

$$c = \frac{ab}{a+b}.$$

**727.** Рассмотрим отрезок $AB$ (рис. 5). Из концов $A$ и $B$ проводим две прямые $AN$ и $BL$ под углом в 60° к линии $AB$. Из концов отрезка $AB$ опишем две окружности данным раствором циркуля. Отложим $n$ раз радиус на линиях $AN$ и $BL$ и точки $D$ и $C$ соединим соответственно с $B$ и $A$. Через точки деления отрезка $AD$ проводим линии, параллельные $AC$; отрезок $AB$ разделится при этом также на $n$ равных частей.

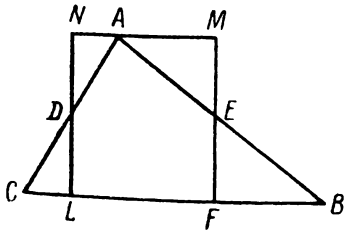



Рис. 6.

**728.** У к а з а н и е. Пусть треугольник $ABC$ остроугольный (рис. 6). Из середин сторон $AC$ и $AB$ опускаем на основание $BC$ перпендикуляры $DL$ и $EF$. Отрезав треугольники $CDL$ и $BFE$ и повернув их вокруг точек $D$ и $E$ на 180° так, чтобы они совпали, соответственно, с треугольниками $DNA$ и $AME$, получим искомый прямоугольник. Каждая из

сторон остроугольного треугольника $ABC$ может быть принята за основание, следовательно, треугольник может быть разрезан тремя способами.

Прямоугольный и тупоугольный треугольники рассмотреть самостоятельно.

**731.** Обозначим $BK = x$, $BN = y$ и $CM = z$; площади треугольников $ABC$ и $KNB$ (рис. 7) через $S$ и $S_1$.

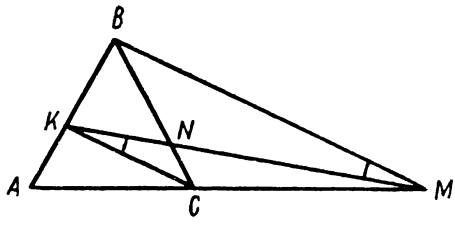


Рис. 7.

По условию

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{2}, \tag{1}$$

кроме того,

$$\frac{S_1}{S} = \frac{xy}{a \cdot a} \tag{2}$$

(так как в рассматриваемых треугольниках имеется общий угол $B$).

Сравнивая правые части равенств (1) и (2), находим

$$xy = \frac{a^2}{2}. \tag{3}$$

Рассматривая треугольники $KBC$ и $KMC$, видим, что они равновелики и имеют общее основание $KC$, поэтому их высоты, опущенные из точек $B$ и $M$ на это основание, равны; следовательно, линия $BM \parallel KC$.

Исходя из этого, находим

$$\frac{AC}{CM} = \frac{AK}{BK}, \text{ т. е. } \frac{a}{z} = \frac{a-x}{x}, \tag{4}$$

$$\frac{BN}{CN} = \frac{BM}{KC} = \frac{AB}{AK}, \text{ т. е. } \frac{y}{a-y} = \frac{a}{a-x}. \tag{5}$$

Решая систему уравнений (3), (4) и (5), находим

$$x = \frac{2}{3}a, \; y = \frac{3}{4}a, \; z = 2a.$$

**Ответ.** $BK = \frac{2}{3}a$, $BN = \frac{3}{4}a$, $CM = 2a$.

**732.** Пусть дан треугольник $ABC$ (рис. 8). Возьмем на стороне $AC$ произвольную точку $D$. Построим относительно сторон $AB$ и $BC$ точки $D_1$ и $D_2$, симметричные с точкой $D$. На сторонах $AB$ и $BC$ возьмем две точки $N$ и $M$; соединяя три точки $D$, $N$ и $M$, получим вписанный треугольник $DNM$. Периметр этого треугольника равен длине ломаной $D_1MND_2$. Вписанный треугольник с наименьшим периметром получится в том случае, когда линия $D_1MND_2$ будет прямой. Итак, если точка $D$ задана, то вписанный треугольник $DNM$ будет иметь наименьший периметр, если линия $D_1D_2$ будет прямая.

Для решения данной задачи необходимо выбрать на стороне $AC$ точку $D$ так, чтобы длина отрезка $D_1D$ была наименьшей.

Легко заметить, что $BD = BD_1 = BD_2$, так как точки $D_1$ и $D_2$ симметричны с $D$ относительно сторон $BC$ и $AB$; соответственно и $\angle D_1BD_2 = 2\angle B$. Отсюда следует, что угол при вершине $B$ равнобедренного треугольника $BD_1D_2$ не зависит от выбора точки $D$ на стороне $AC$, поэтому длина стороны $D_1D_2$ этого треугольника будет наи-

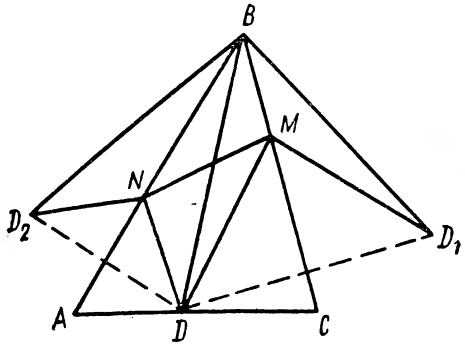



Рис. 8.

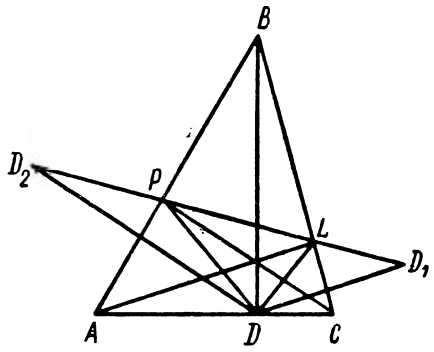



Рис. 9.

меньшей, если длины отрезков $BD = BD_1 = BD_2$ будут наименьшие; это требование выполняется, если отрезок $BD$ служит высотой треугольника $ABC$.

Можно доказать, что если точка $D$ служит основанием высоты $BD$ треугольника $ABC$, то точки $D_1$ и $D_2$ лежат на продолжениях отрезка $PL$ (рис. 9), соединяющего основания $P$ и $L$ высот $CP$ и $AL$ данного треугольника, так как если точки $D$, $P$ и $L$ — основания высот, то $\angle BLP = \angle CLD$. Кроме того, $\angle CLD = \angle CLD_1$, так как точки $D$ и $D_1$ симметричны относительно $BC$, откуда $\angle BLP = \angle CLD_1$, поэтому точка $D_1$ лежит на продолжении отрезка $PL$. Также можно доказать, что точка $D_2$ лежит на продолжении отрезка $PL$.

Итак, наименьший периметр имеет вписанный треугольник $DPL$, вершинами которого служат основания высот данного треугольника $ABC$.

**734.** Построив чертеж (рис. 10), видим, что $\triangle LmK \sim \triangle BKC$. Из подобия этих прямоугольных треугольников следует, что

$$\frac{Lm}{BC} = \frac{mK}{CK},$$

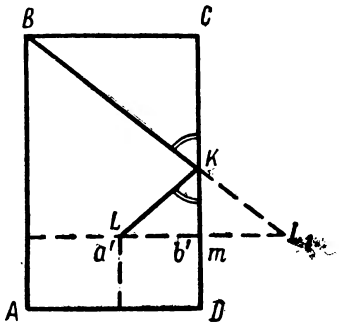



Рис. 10.

где $Dm = a'$; $BC = b$; $CD = a$; $mK = DK - mD = DK - a'$; $CK = a - DK$; $Lm = b'$.

**Ответ.** $DK = \dfrac{a'b + b'a}{b' + b}$.

**735.** Пусть судно движется по направлению $KO$ (рис. 11) до перемены направления и по $OD$ после перемены направления

$$\angle COQ = 15°,$$
$$\angle DOQ = 60°,$$
$$\angle ODQ = 90°$$

(так как линия $DQ$ параллельна биссектрисе прямого угла $BOC$) и $\angle PQD = 30°$.

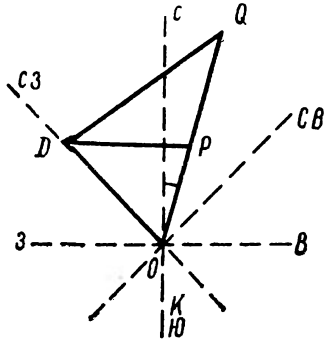


Рис. 11.

Имеем:

$$OD = 5;\ OQ = 10;\ DQ = 5\sqrt{3};$$

$$\frac{OD}{DQ} = \frac{OP}{PQ}$$ ($DP$ — биссектриса угла $D$)

или

$$\frac{OP}{PQ} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};\quad OP + PQ = 10.$$

**Ответ.** $PQ = 5(3 - \sqrt{3})$.

**736.** Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 12). В треугольнике $ABC$ линии $CE$ и $BO'$ — медианы, поэтому

$$BL = \frac{2}{3}O'B = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}BD = \frac{1}{3}BD,$$

где

$$O'B = \frac{1}{2}BD.$$

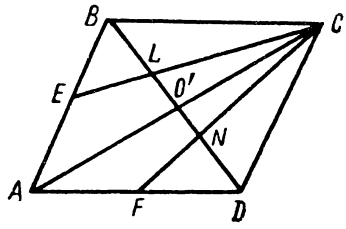


Рис. 12.

Аналогично, в треугольнике $ACD$ линии $CF$ и $DN$ — медианы, поэтому

$$DN = \frac{1}{3}BD.$$

Следовательно,

$$LN = \frac{1}{3}BD,$$

что и требовалось доказать.

**737.** $P = 204{,}3$ *см*.

**738.** Пусть $AF$, $DF$, $BE$ и $CE$ — биссектрисы углов: $\angle A$, $\angle D$, $\angle B$ и $\angle C$ четырехугольника $ABCD$ (рис. 13).

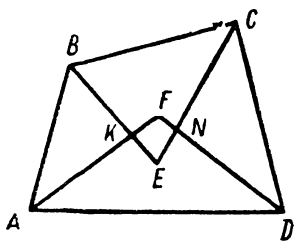


Рис. 13.

В треугольнике $AFD$

$$\angle AFD = 180° - \frac{\angle A + \angle D}{2}. \qquad (1)$$

В треугольнике $BEC$

$$\angle BEC = 180° - \frac{\angle B + \angle C}{2}. \qquad (2)$$

Складывая почленно равенства (1) и (2), находим:

$$\angle AFD + \angle BEC = 360° - \frac{\angle A + \angle B + \angle C + \angle D}{2} = 180°.$$

Итак,

$$\angle KFN + \angle KEN = \angle EKF + \angle ENF = 180°.$$

что и требовалось доказать.

**739.** У к а з а н и е. Обозначить длины диагоналей вписанного четырехугольника $x$ и $y$ и использовать известные соотношения:

$$xy = ac + bd, \quad \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

**Ответ.** $x = \sqrt{\dfrac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + dc}}$,

$$y = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}.$$

**740.** У к а з а н и е. Обозначая диагонали и сторону квадрата соответственно через $d$ и $a$, согласно условию задачи составим два уравнения:

$$d - a = 6$$

и

$$d^2 = 2a^2.$$

**Ответ.** $R = 10{,}243$ *м*; $a \approx 14{,}485$ *м*; $d \approx 20{,}485$ *м*.

**741.** В данном треугольнике $ABC$ (рис. 14) проводим линию $DE \parallel BC$ и обозначим искомый отрезок $AE = x$. Из подобия треугольников $BAC$ и $DAE$ находим:

$$\frac{x}{b} = \frac{AD}{c} = \frac{DE}{a},$$

откуда $AD = \dfrac{cx}{b}$, $DE = \dfrac{ax}{b}$.

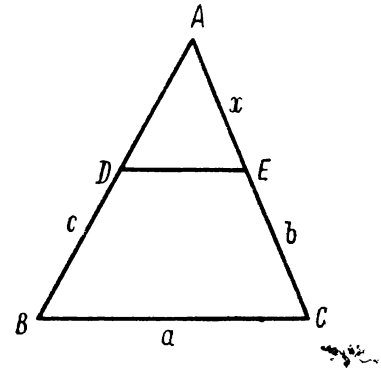



Рис. 14.

Стороны трапеции $BDEC$: $BC = a$, $DE = \dfrac{ax}{b}$, $EC = b - x$,

$$BD = c - \frac{cx}{b} = \frac{c(b - x)}{b}.$$

По условию, периметр трапеции $BDEC$ равен $2p$, поэтому

$$a + b - x + \frac{ax}{b} + \frac{c(b - x)}{b} = 2p; \quad x = \frac{b(p_1 - p)}{p_1 - a},$$

где $2p_1 = a + b + c$, $p_1 > p$, $p_1 > a$.

**742.** Указание. Обозначим длину искомой диагонали $AC = x$. Из прямоугольных треугольников $BNC$ и $ONC$ находим (рис. 15):

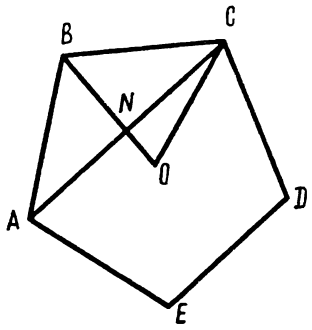


Рис. 15.

$$BN = \sqrt{BC^2 - NC^2},$$

$$ON = \sqrt{OC^2 - NC^2}$$

Но

$$BN + ON = R,$$

т. е.

$$R = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}},$$

откуда

$$a^4 = R^2 (4a^2 - x^2). \quad (1)$$

Кроме этого (см. 3, стр. 496),

$$a = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{10}}. \quad (2)$$

Исключая $R$ из соотношений (1) и (2), находим:

$$x = \frac{a(5 + \sqrt{5})}{2\sqrt{5}}.$$

**Ответ.** $AC = \dfrac{a(5 + \sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$.

**743.** Указание. Имеем $\triangle MOC \sim \triangle AMB$ (рис. 16), откуда

$$\frac{CO}{AB} = \frac{MC}{MB},$$

или

$$\frac{CO}{c} = \pm\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bh_b},$$

где $AB = c$, $MB = h_b$ и $MC$ определено из соотношения

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2b \cdot MC.$$

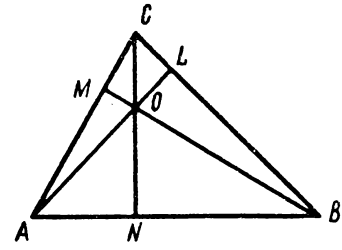


Рис. 16.

Следовательно,

$$CO = \pm\frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2bh_b} = \pm\frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{4S},$$

где $b \cdot h_b = 2S$.

Аналогично находим $AO$ и $BO$.

**Ответ.** $CO = \pm\dfrac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{4S}$, . . .

Примечание. Знак (—) относится к расстояниям ортоцентра от вершин тупых углов.

**744.** Имеем (рис. 17):

$$b + c = CL + LA + AM + MB;$$

но

$$CL = NC = r,$$
$$LA = AM = b - r,$$
$$MB = NB = a - r,$$

следовательно,

$$b + c = 2b - 2r + a,$$

или

$$c - b = a - 2r. \qquad (1)$$

По теореме Пифагора

$$c^2 - b^2 = a^2,$$

или

$$(c - b)(c + b) = a^2,$$

откуда

$$c + b = \frac{a^2}{a - 2r}. \qquad (2)$$

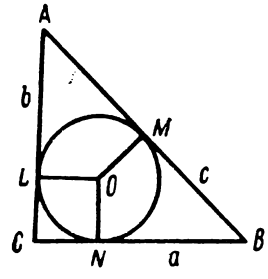


Рис. 17.

Решая систему уравнений (1) и (2), находим ответ:

$$c = \frac{a^2 - 2r(a - r)}{a - 2r}; \quad b = \frac{2r(a - r)}{a - 2r}.$$

**745.** Указание. Имеем (рис. 17):

$$a + b = AL + LC + CN + NB,$$
$$AL + NB = AM + MB = c;$$

но

$$LC = CN = r,$$

следовательно,

$$a + b = c + 2r. \qquad (1)$$

Возвышая обе части равенства (1) в квадрат и заменяя $a^2 + b^2 = c^2$, находим:

$$ab = 2r(c + r). \qquad (2)$$

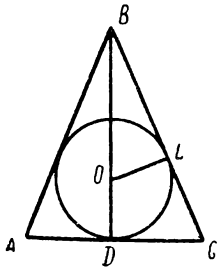


Рис. 18

По сумме катетов (1) и их произведению (2) найдем $a$ и $b$ как корни квадратного уравнения:

$$x^2 - (c + 2r)x + 2r(c + r) = 0.$$

**746.** Согласно условию (рис. 18):

$$BD = h,\ OL = r;\ DC = CL = x.$$

Из прямоугольных треугольников $BOL$ и $BDC$ имеем

$$BL = \sqrt{(h - r)^2 - r^2} = \sqrt{h^2 - 2rh};$$
$$(BL + x)^2 = h^2 + x^2,$$

откуда $x = \dfrac{rh}{\sqrt{h(h-2r)}}$.

**Ответ.** $AB = BC = BL + x = \dfrac{h(h-r)}{\sqrt{h(h-2r)}}$;

$$AC = \frac{2rh}{\sqrt{h(h-2r)}}.$$

747. $x_1 = 4\sqrt{7}$, $y_1 = 6\sqrt{7}$; $x_2 = 4\sqrt{15}$, $y_2 = 2\sqrt{15}$.

748. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ *см*.

**749.** Рассмотрим остроугольный треугольник $ABC$ (рис. 19). Пусть $O$ — ортоцентр, $L$ — точка, симметричная с $O$ относительно стороны $AC$.

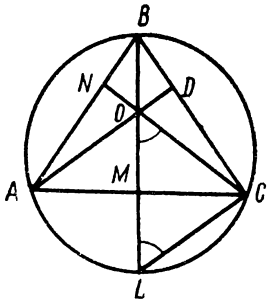


Рис. 19.

Треугольник $COM$ равен треугольнику $CLM$, так как они прямоугольные и имеют равные катеты; поэтому $\angle CLM = \angle COM$. Кроме того, $\angle COM = \angle CAB$ (углы с соответственно перпендикулярными сторонами), откуда

$$\angle CLM = \angle CAB.$$

Следовательно, точки $A$, $B$, $C$ и $L$ лежат на описанной окружности.

Аналогично можно доказать, что точки, симметричные с $O$ относительно остальных двух сторон треугольника, лежат на этой же описанной окружности.

Для тупоугольного треугольника доказать самостоятельно.

**750.** У к а з а н и е. Сторона квадрата равна стороне правильного вписанного треугольника, т. е. $a_4 = a_3 = R\sqrt{3}$.

**Ответ.** $R_1 = \dfrac{R\sqrt{6}}{2}$.

**751.** У к а з а н и е. Обозначим радиус описанного круга $R$ (рис. 20). Треугольник $ABC$ вписан в круг. $O$ — центр круга, $BD$ — диаметр. Треугольник $BCD$ — прямоугольный ($\angle C$ опирается на диаметр).

$$\triangle BCD \sim \triangle ABE$$

(эти треугольники прямоугольные и $\angle BAC = \angle BDC$).

Следовательно,

$$\frac{c}{h_b} = \frac{2R}{a},$$

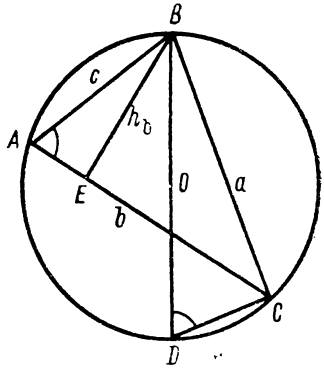


Рис. 20.

где

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

**Ответ.** $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \dfrac{abc}{4S_\Delta}$.

752. По условию

$$AB^2 = 2AC^2. \tag{1}$$

Проведем хорды $NA$ и $NB$ и продолжим их до встречи в точках $K$ и $M$ с продолжениями стороны $CD$ (рис. 21).

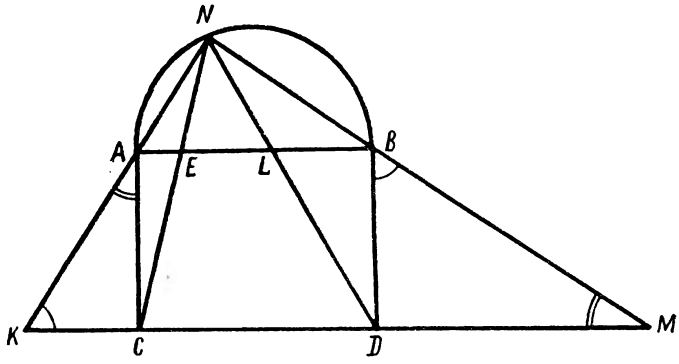



Рис. 21.

Находим:

$$\frac{KC}{AE} = \frac{CD}{EL} = \frac{DM}{LB}. \tag{2}$$

Из подобия треугольников $AKC$ и $BDM$ имеем:

$$\frac{KC}{BD} = \frac{AC}{DM}; \tag{3}$$

но

$$BD = AC,$$

поэтому

$$2KC \cdot DM = 2AC^2 = AB^2 = CD^2. \tag{4}$$

Заменяя в соотношении (4) $KC$, $DM$ и $CD$ величинами, им пропорциональными, из соотношения (2), получим:

$$2AE \cdot BL = EL^2. \tag{5}$$

Так как $AL + BE = AB + EL$,

то

$$AL^2 + BE^2 + 2AL \cdot BE = AB^2 + EL^2 + 2AB \cdot EL = AB^2 + 2AE \cdot BL + 2AB \cdot EL = AB^2 + 2(AE \cdot BL + AB \cdot EL),$$

откуда $$AL^2 + BE^2 = AB^2,$$
так как соотношение
$$AL \cdot BE = AE \cdot BL + AB \cdot EL$$
вытекает из следующего тождества:
$$(AE + EL)(EL + LB) = AE \cdot BL + (AE + EL + LB) \cdot EL.$$

**753.** Рассмотрим вписанный четырехугольник $ABDC$ (рис. 22).
Строим угол $\angle CAF = \angle BAD$.
Кроме того, $\angle BDA = \angle BCA$,
как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу; поэтому
$$\triangle ABD \sim \triangle AFC,$$

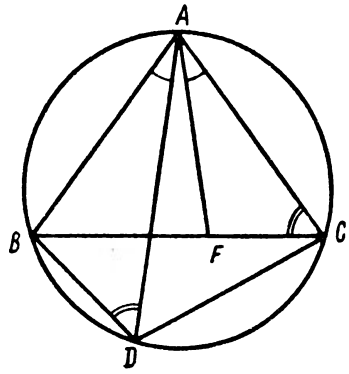


Рис. 22.

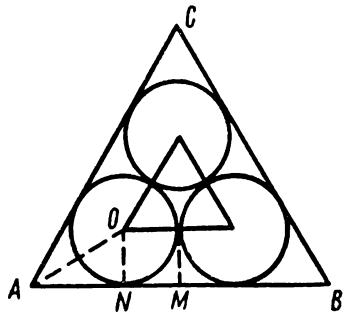


Рис. 23.

откуда
$$\frac{BD}{FC} = \frac{AD}{AC},$$
$$BD \cdot AC = FC \cdot AD. \qquad (1)$$
$$\triangle BAF \sim \triangle DCA,$$
так как
$$\angle BAF = \angle DAC \text{ и } \angle ABC = \angle ADC,$$
откуда
$$\frac{BF}{DC} = \frac{AB}{AD},$$
или
$$DC \cdot AB = BF \cdot AD. \qquad (2)$$

Складывая почленно соотношения (1) и (2), имеем:
$$AC \cdot BD + AB \cdot DC = (BF + FC)\, AD = BC \cdot AD.$$

**754.** Обозначим искомый радиус $r$; тогда (рис. 23)
$$AN + r = \frac{a}{2}.$$

Но в треугольнике $AON$ $\angle A = 30°$, поэтому $AO = 2r$; $AN = r\sqrt{3}$, следовательно, $r\sqrt{3} + r = \frac{a}{2}$,

откуда и находим ответ:

**Ответ.** $r = \frac{1}{4} a (\sqrt{3} - 1)$.

**755.** Пусть искомая хорда $AC$ стягивает сумму дуг $AB$ и $BC$ (рис. 24). Известно, что во всяком вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птоломея), поэтому

$$AC \cdot BD = a \cdot CD + b \cdot AD,$$

или

$$AC \cdot 2r = a\sqrt{4r^2 - b^2} + b\sqrt{4r^2 - a^2},$$

так как

$$BD = 2r;\ CD = \sqrt{(2r)^2 - b^2};$$

$$AD = \sqrt{(2r)^2 - a^2},\ AC = x.$$

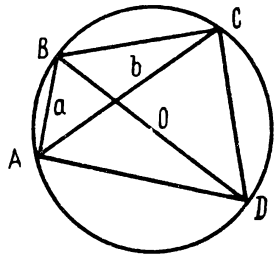


Рис. 24.

После преобразования находим ответ:

$$x = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}} + b\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}.$$

Аналогично для хорды разности данных дуг

$$z = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}} - b\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}\ (a > b).$$

Примечание. Формулы значительно упрощаются, если взять $r = 1$.

**756.** Сторона правильного 15-угольника стягивает дугу, равную разности дуг, стягиваемых стороной правильного шестиугольника и правильного десятиугольника:

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}.$$

По формуле (см. № 755), полагая $r = 1$, находим:

$$a_{15} = a_6\sqrt{1 - \frac{a_{10}^2}{4}} - a_{10}\sqrt{1 - \frac{a_6^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4 \cdot 4}} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{4}}.$$

**Ответ.** $a_{15} = \frac{1}{4}\left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}\,(\sqrt{5} - 1)\right]$.

757. Обозначим $AB = a_{10}$ (рис. 25).

$$\angle AOB = \frac{2d}{5}, \quad \angle A = \angle B = \frac{4d}{5}.$$

Построим биссектрису $AD$ угла $A$.
Два треугольника $ADB$ и $ADO$ равнобедренные

$$\left(\angle ADB = \angle ABD = \frac{4}{5}d, \quad \angle AOD = \angle OAD = \frac{2}{5}d\right);$$

$$AD = AB = OD.$$

Используя свойство биссектрисы внутреннего угла, находим:

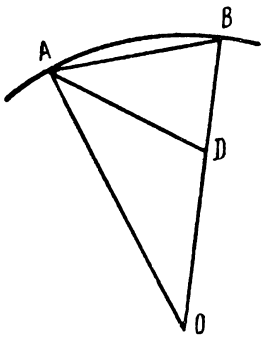


Рис. 25.

$$\frac{AB}{AO} = \frac{DB}{OD},$$

т. е.

$$\frac{OD}{AO} = \frac{BD}{OD},$$

что и требовалось доказать.

**Ответ.** $AB = a_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$,

758. $R = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$.

**759.** По условию отношение оснований $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$. Обозначая $a = 3x$, $b = 4x$ и зная длину средней линии трапеции, имеем:

$$\frac{3x + 4x}{2} = 7,$$

откуда находим $x = 2$, т. е. основания трапеции соответственно равны: $a = 6$; $b = 8$. Центр $O$ описанной окружности лежит на высоте равнобочной трапеции, проведенной через точку пересечения диагоналей. Обозначая искомый радиус буквой $R$, из прямоугольных треугольников $AON$ и $BOM$ находим:

$$R^2 = z^2 + 4^2.$$

$$R^2 = (7 - z)^2 + 3^2,$$

откуда $z = 3$, следовательно, $R = 5$.

**Ответ.** $R = 5$ *м*.

**760.** У к а з а н и е. Треугольник $BOC$ прямоугольный (рис. 26); $CD$ — высота, опущенная из прямого угла $C$ на гипотенузу $OB$, поэтому

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h \cdot OD \\ R^2 = OD^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2. \end{cases}$$

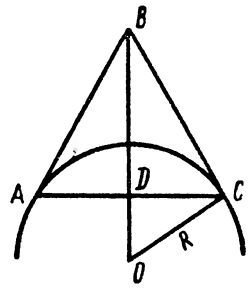


Рис. 26.

**Ответ.** $R = \frac{a}{4h}\sqrt{a^2 + 4h^2}$.

**761.** $P = 4m$, длина боковой стороны равна $m$.

**763.** Рассматривая треугольники $AOD$ и $AOB$ (см. рис. 3), находим, что они имеют равные основания

$$OB = OD = \frac{2}{3} m_b$$

и равные высоты $AK$; следовательно, их площади равны, т. е.

$$\text{пл. } \triangle AOD = \text{пл. } \triangle AOB = \frac{1}{3} \text{ пл. } \triangle ABC,$$

откуда, обозначая площадь треугольника $ABC$ через $S$, имеем

$$S = 3 \text{ пл. } \triangle AOD.$$

Стороны треугольника $AOD$:

$$AO = \frac{2}{3} m_a, \quad OD = \frac{2}{3} m_b,$$

$$AD = OC = \frac{2}{3} m_c,$$

поэтому

$$S = 3\sqrt{p_1\left(p_1 - \frac{2}{3}m_a\right)\left(p_1 - \frac{2}{3}m_b\right)\left(p_1 - \frac{2}{3}m_c\right)},$$

где

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c\right) = \frac{1}{3}(m_a + m_b + m_c),$$

или, после преобразований, получим искомое.

**Ответ.** $S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_a + m_c - m_b)(m_a + m_b - m_c)}$.

**764.** Вычислим площадь треугольника $S'$, длины сторон которого $m_a$, $m_b$ и $m_c$.

По формуле Герона имеем:

$$S' = \sqrt{\frac{1}{2}(m_a+m_b+m_c)\left[\frac{1}{2}(m_a+m_b+m_c)-m_a\right]\times}$$

$$\times\left[\frac{1}{2}(m_a+m_b+m_c)-m_b\right]\left[\frac{1}{2}(m_a+m_b+m_c)-m_c\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_b+m_c-m_a)(m_a+m_c-m_b)\times}$$

$$\times(m_a+m_b-m_c).$$

Площадь данного треугольника, вычисленная по трем его медианам (см. № 717),

$$S=\frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_b+m_c-m_a)\times}$$

$$\times(m_a+m_c-m_b)(m_a+m_b-m_c),$$

откуда

$$S : S' = 4 : 3.$$

**Ответ.** 4 : 3.

**765.** Площадь треугольника $ABC$

$$S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2} \tag{1}$$

и

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{2}$$

Зная, что $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, выразим стороны треугольника из равенства (1) через $S$ и подставим их в формулу (2); найдем:

$$S=S^2\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\times}$$

$$\times\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right).$$

**Ответ.** $S=1:\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\times}$

$$\times\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right).$$

**766.** В данном треугольнике $ABC$ (рис. 27) продолжим сторону $AC$ до пересечения ее в точке $K$ с $BK \parallel DC$. Найдем, что треугольник $BCK$

равнобедренный ($\angle K = \angle CBK$, $BC = CK = a$); вычислим его третью сторону $BK$ из пропорции ($DC = \beta_C$)

$$\frac{BK}{\beta_C} = \frac{b+a}{b},$$

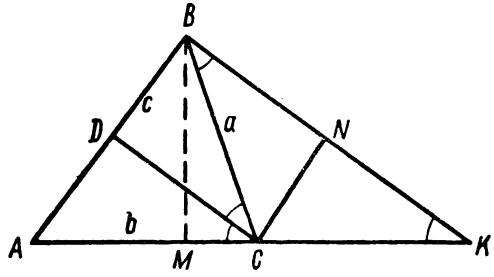



Рис. 27.

откуда $BK = \dfrac{\beta_C (a+b)}{b}$.

В треугольнике $BCK$ высота

$$CN = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - \beta_C^2 (a+b)^2}}{2b}.$$

Вычислим площадь треугольника $BCK$

$$S' = \frac{BK \cdot CN}{2} = \frac{\beta_C (a+b)\sqrt{4a^2b^2 - \beta_C^2 (a+b)^2}}{4b^2}.$$

Треугольники $ABC$ и $BCK$ имеют общую высоту $BM$, поэтому их площади относятся между собой как основания. Обозначим искомую площадь треугольника $ABC$ через $S$; имеем

$$S : S' = b : a,$$

откуда находим

$$S = \frac{S'b}{a}.$$

**Ответ.** $S = \dfrac{\beta_C (a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - \beta_C^2 (a+b)^2}$.

**767.** $S = 104\sqrt{14}$.

**768.** $h = 4{,}8$ *м*; $S_1 = 8{,}64$ *м*$^2$; $S_2 = 15{,}36$ *м*$^2$.

**769.** Прямая, проведенная параллельно основанию треугольника, отсекает треугольник, подобный данному. Площади подобных треугольников относятся, как квадраты сходственных сторон. Обозначая искомую

сторону $x$, а площади треугольников соответственно через $S$ и $S_1$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{S_1}{S} = \dfrac{x^2}{a^2}, \\ S = 0{,}5S_1; \end{cases}$$

решая ее, найдем: $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

**770.** $x = \dfrac{25\sqrt{2}}{2}$ *см*.

**771.** Обозначив диагонали ромба через $2x$ и $2y$, согласно условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2xy = Q \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{m}{n}, \end{cases}$$

откуда $x = \sqrt{\dfrac{mQ}{2n}}$, $y = \sqrt{\dfrac{nQ}{2m}}$.

По теореме Пифагора находим сторону ромба:

$$a = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Ответ.** $a = \sqrt{Q \cdot \dfrac{n^2 + m^2}{2mn}}$.

**772.** $S = 6$ *м*$^2$.

**773.** Сторона ромба

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}.$$

По формуле площади ромба

$$S = a \cdot CE = a \cdot CF = \frac{1}{2}\, d_1 d_2$$

находим, что $CE = CF = \dfrac{d_1 d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$.

Следовательно, прямоугольные треугольники $ACF$ и $ACE$ равны по катетам ($CE = CF$) и гипотенузе $AC$.

Для вычисления искомой площади находим отрезок

$$AE = \sqrt{d_1^2 - CE^2} = \frac{d_1^2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}.$$

Искомая площадь $S' = AE \cdot CE$

**Ответ.** $S' = \dfrac{d_1^3 d_2}{d_1^2 + d_2^2}$.

**774.** Обозначим диагонали ромба соответственно через $3x$ и $4x$. Площадь ромба $S = 6x^2$.

Сторона ромба $a = \sqrt{(2x)^2 + \left(\dfrac{3x}{2}\right)^2} = 2{,}5x$.

Радиус вписанного круга $r = \dfrac{S}{2a} = 1{,}2x$.

Площадь вписанного круга $S_1 = \pi\,(1{,}2x)^2$.

**Ответ.** $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{25}{6\pi}$.

**775.** Диагональ квадрата (рис. 28) $d = a\sqrt{2}$.
В треугольнике $ABD$ средняя линия

$$EF = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

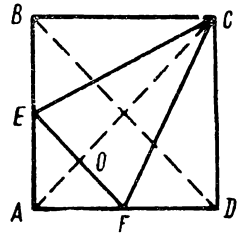


Рис. 28.

В равнобедренном треугольнике $AOE$ стороны

$$AO = OE = \frac{a\sqrt{2}}{4},$$

поэтому $OC = d - AO = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Следовательно, искомая площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2} EF \cdot OC.$$

**Ответ.** $S = \dfrac{3}{8} a^2$.

**776.** Искомый четырехугольник — ромб с углами, равными 60° и 120°, что очевидно из построения (рис. 29).

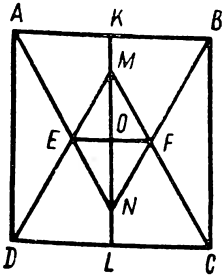


Рис. 29

Высота треугольника $DMC$ $ML = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; отрезок $MK = a - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Бóльшая диагональ ромба

$$MN = LK - 2MK = a\,(\sqrt{3} - 1).$$

Треугольник $EMF$ равносторонний, так как

$$EM = MF = EF.$$

Из прямоугольного треугольника $EOM$ имеем:

$$EM^2 - OE^2 = OM^2$$

но $CE = \frac{EM}{2}$,

$$OM = \frac{MN}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1),$$

поэтому $EM^2 - \frac{EM^2}{4} = \frac{a^2}{4}(\sqrt{3} - 1)^2$,

откуда сторона ромба

$$EM = \frac{a(3 - \sqrt{3})}{3}.$$

Но сторона ромба равна меньшей его диагонали, следовательно, искомая площадь ромба

$$S = \frac{1}{2} EF \cdot MN = \frac{1}{2} EM \cdot MN$$

**Ответ.** $S = \frac{a^2}{3}(2\sqrt{3} - 3)$.

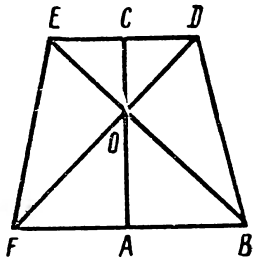


Рис. 30

778. Проведем высоту равнобочной трапеции $AC$ через точку пересечения диагоналей $O$; точки $A$ и $C$ будут серединами оснований трапеции (рис. 30). Рассмотрим треугольники $AOB$ и $OCD$; эти треугольники прямоугольные и равнобедренные, поэтому

$$AC = AO + OC = AB + CD = m.$$

Следовательно, площадь трапеции

$$S = m^2.$$

**Ответ.** $S = m^2$.

779. По условию задачи (рис. 31)

$$\text{пл. } AMND = \text{пл. } MBCN. \qquad (1)$$

Обозначая $MN = x$, находим.

$$\frac{x + a}{2} \cdot NF = \frac{x + b}{2} \cdot CE,$$

где

$$CE \perp MN,\ NF \perp AD,$$

т. е.

$$\frac{x + a}{x + b} = \frac{EC}{NF}. \qquad (2)$$

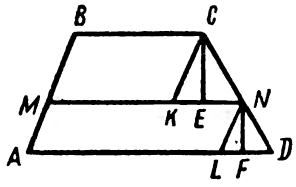


Рис. 31.

Из подобия треугольников $KCN$ и $LND$ ($KC \parallel MB$, $NL \parallel AM$) получим:

$$\frac{KN}{LD} = \frac{CE}{NF},$$

т. е.

$$\frac{x-b}{a-x} = \frac{CE}{NF}. \tag{3}$$

Сравнивая соотношения (2) и (3), находим $x$.

**Ответ.** $x = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

**780.** Указание. Если использовать свойство описанного четырехугольника, то легко найти, что полусумма параллельных сторон трапеции равна длине боковой стороны $c$; высота равна $2r$.

**Ответ.** $S = 2cr$.

**781.** Указание. Обозначив сторону треугольника $a$ и высоту $h$, имеем:

$$a - h = d, \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad a = 2(2+\sqrt{3})\,d.$$

Площадь равностороннего треугольника $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

**Ответ.** $S = (12+7\sqrt{3})\,d^2$.

**782.** В прямоугольной трапеции $ABCD$ $BL$ — высота, $\angle A = 60°$. Поэтому в прямоугольном треугольнике $ABL$ угол $ABL = 30°$. Следовательно, $AB = 2AL = 2(a-b)$ и $BL = (a-b)\sqrt{3}$, откуда искомая площадь трапеции $S = \dfrac{1}{2}(a^2-b^2)\sqrt{3}$.

**783.** Площадь трапеции $S = \dfrac{a+b}{2}\cdot h$. Найти $h$. Для этого из точки $B$ (рис. 32) проведем высоту трапеции $BK$ и линию $BE \parallel CD$ ($AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $CD = d$).

Из треугольника $ABE$ находим:

$$c^2 = d^2 + (a-b)^2 - 2(a-b)\cdot KE,$$

откуда

$$KE = \frac{d^2 - c^2 + (a-b)^2}{2(a-b)}.$$

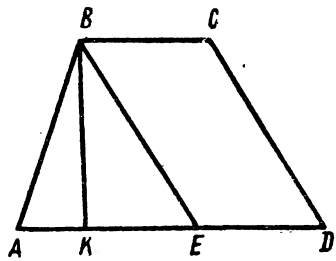


Рис. 32.

Из треугольника $BKE$ находим:

$$h = \sqrt{d^2 - KE^2} = \sqrt{d^2 - \left[\frac{d^2 - c^2 + (a-b)^2}{2(a-b)}\right]^2};$$

следовательно,

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot\sqrt{d^2-\left[\frac{d^2-c^2+(a-b)^2}{2(a-b)}\right]^2};$$

после элементарных преобразований получим

$$S=\frac{a+b}{4(a-b)}\times$$

$$\times\sqrt{(a-b+c+d)(a-b-c+d)(a+b+c-d)(c-a-b+d)}.$$

**784.** Обозначим $DK=a$, $LN=b$, $KE=c$ (рис. 33), $S$ — площадь искомого треугольника. Согласно условию задачи (параллельность сторон треугольников), полученные треугольники $DFK$, $KME$ и $LKN$ (площади которых $S_1$, $S_2$ и $S_3$) подобны основному треугольнику $ABC$, поэтому:

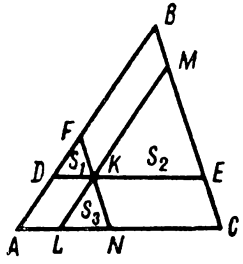



Рис. 33

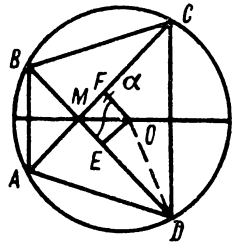



Рис. 34

$$\frac{S_1}{S}=\frac{a^2}{(a+b+c)^2};$$

$$\frac{S_2}{S}=\frac{c^2}{(a+b+c)^2};$$

$$\frac{S_3}{S}=\frac{b^2}{(a+b+c)^2},$$

т. е.

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{a}{a+b+c},\quad\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{c}{a+b+c},\quad\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{b}{a+b+c},$$

следовательно,

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1,$$

откуда

$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}.$$

**Ответ.** $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

**785.** Указание. Искомая площадь четырехугольника $ABCD$

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD.$$

При $\alpha=45^\circ$ имеем (рис. 34):

$$AC=BD=2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}.$$

**Ответ.** $S=2\left(R^2-\frac{a^2}{2}\right)$.

**786.** $S=54$ *см*$^2$.

787. $2R^2$; $\frac{3}{4}\sqrt{3}\,R^2$; $\frac{3}{2}\sqrt{3}\,R^2$; $8 : 3\sqrt{3} : 6\sqrt{3}$.

788. Указание. Обозначить длины сторон прямоугольника $x$ и $y$, их отношение — $k$; составить систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = S, \\ \dfrac{x}{y} = k. \end{cases}$$

789. Обозначим стороны данного треугольника $2x - d$, $2x$ и $2x + d$, так как эти три числа образуют арифметическую прогрессию; $d$ — разность прогрессии. Тогда $2p = 6x$; $p = 3x$. Стороны равностороннего треугольника $a_3 = 2x$, площадь которого

$$S = \frac{a_3^2\sqrt{3}}{4} = x^2\sqrt{3}.$$

Площадь заданного треугольника по формуле Герона

$$S' = \sqrt{3x\,(x + d)\,x\,(x - d)} = \sqrt{3x^2\,(x^2 - d^2)}.$$

По условию

$$S' = \frac{3}{5}S; \quad \sqrt{3x^2\,(x^2 - d^2)} = \frac{3}{5}x^2\sqrt{3},$$

откуда

$$2x = \frac{5}{2}d.$$

Следовательно,

$$a = 2x - d = 3 \cdot \frac{d}{2},$$

$$b = 5 \cdot \frac{d}{2}, \quad c = 2x + d = 7 \cdot \frac{d}{2}.$$

**Ответ.** $a : b : c = 3 : 5 : 7$.

790. Указание. Обозначая две другие стороны треугольника через $x$ и $y$, по формуле Герона находим:

$$S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - x)\,(p - y)}.$$

Величина площади $S$ зависит от произведения четырех множителей, но первые два из них постоянные, следовательно, достаточно рассмотреть множители $(p - x)$ и $(p - y)$. Сумма этих множителей постоянна и равна $a$, поэтому (см. № 703) $S$ принимает наибольшее значение, когда $p - x = p - y$, т. е. $x = y$.

**Ответ.** Треугольник равнобедренный.

**791.** Обозначим одну сторону прямоугольника через $x$, вторую — $(p - x)$. Площадь прямоугольника

$$S = x(p - x)$$

Произведение двух положительных множителей $x$ и $p - x$, сумма которых постоянна (см. № 703), принимает наибольшее значение если эти сомножители равны между собой,

$$x = p - x, \quad x = \frac{p}{2}.$$

Следовательно, прямоугольник с наибольшей площадью есть квадрат.

**Ответ.** При $x = \frac{p}{2}$ $S = \frac{p^2}{4}$.

**792.** Указание. Обозначим $A_1B_1 = x$, $B_1C_1 = y$, $AB = c$, $CD = h$. Искомая площадь прямоугольника (рис. 35):

$$S = xy.$$

Из подобия треугольников $ABC$ и $A_1B_1C$ находим:

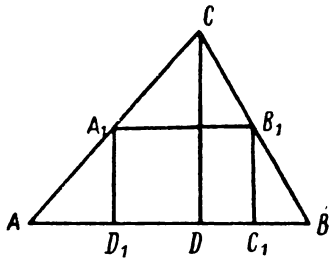


Рис. 35.

$$\frac{x}{c} = \frac{h - y}{h},$$

откуда

$$x = \frac{c(h - y)}{h}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{c}{h}(h - y)y$$

достигает максимума (см. № 703), когда

$$h - y = y,$$

т. е. при

$$y = \frac{h}{2}.$$

**Ответ.** $S = \frac{ch}{4}$.

**793.** 1-й способ. Обозначим длину одной стороны прямоугольника через $x$, вторую — через $p - x$ где $p$ — полупериметр.

Площадь прямоугольника

$$S = (p - x)x$$

т. е.

$$x^2 - px + S = 0,$$

откуда

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - S}.$$

Чтобы корни полученного квадратного уравнения были вещественными, необходимо и достаточно, чтобы

$$S \leqslant \frac{p^2}{4}.$$

Наибольшее значение

$$S = \frac{p^2}{4},$$

при котором $x = \frac{p}{2}$.

Итак, квадрат имеет наибольшую площадь.

2-й способ. Если сумму неравных сторон прямоугольника принять за диаметр круга $AB$ (рис. 36) и, взяв два любых отрезка $AD$ и $DB$, провести из точки $D$ линию $DF \perp AB$ до пересечения с окружностью, то

$$FD^2 = AD \cdot DB.$$

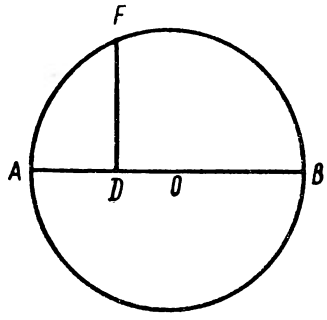


Рис. 36.

Допустим, что точка $D$ перемещается от точки $A$ до точки $B$. Площадь квадрата $FD^2$, равная площади прямоугольника $AD \cdot DB$, при этом вначале будет возрастать, потом убывать и будет наибольшей, когда точка $D$ совпадет с центром полукруга, т. е. когда $AD = DB$.

Отсюда следует, что прямоугольник с равными сторонами имеет наибольшую площадь.

**794.** Обозначим длины сторон: $x - 1$, $x$, $x + 1$; тогда площадь треугольника

$$S = \sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x}{2} + 1\right)} =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{3\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)} = n\sqrt{3(n^2 - 1)},$$

где $\frac{x}{2} = n$.

Чтобы $S$ было целочисленным, необходимо и достаточно, чтобы $x = 2n$ было четным числом и

$$n^2 - 1 = 3m^2,$$

$$n^2 - 3m^2 = 1,$$

т. е.
$$(n - m\sqrt{3})(n + m\sqrt{3}) = 1. \qquad (1)$$

Соотношение (1) выполняется при $n = 2$ и $m = 1$

$$(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1,$$

следовательно,

$$(2-\sqrt{3})^k(2+\sqrt{3})^k = 1 \ (k = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) находим:

$$n_k + m_k\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^k,$$
$$n_k - m_k\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^k,$$

откуда (учитывая обозначения)

$$x_k = 2n_k = (2+\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})^k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

При $k = 1$, $x_1 = 4$, $S = 6$; при $k = 2$, $x_2 = 14$, $S = 84$ и т. д. По этим данным из последней формулы вытекает следующее соотношение:

$$x_k = 4x_{k-1} - x_{k-2}.$$

При $k = 3$, $x_3 = 52$, $S = 1170$; при $k = 4$, $x_4 = 194$, $S = 16\,296$ и т. д. Задача имеет бесчисленное множество решений.

**795.** Указание. Пусть $AB = a_{10}$, $AC = a_5$ (рис. 37). Сторона $AC = 2AD$, т. е. удвоенной высоте треугольника $AOB$, у которого $AO = OB = R$, $AB = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ (см. 3, стр. 496). По этим данным находим:

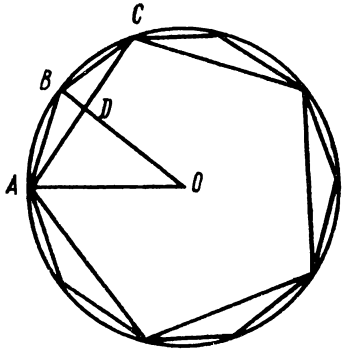


Рис. 37.

$$a_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}. \qquad (1)$$

Искомая площадь

$$S = \frac{5a_5 \cdot OE}{2} = \frac{5a_5}{2}\sqrt{R^2 - \frac{a_5^2}{4}}. \qquad (2)$$

Исключая $R$ из соотношений (1) и (2), получим результат.

**Ответ.** $S = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$.

**797.** $S = \frac{c^2}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

**798.** $r = \frac{2}{3}m\sqrt[4]{3}$.

**799.** Равнобедренный.

**800.** $S_c = 4\pi - 3\sqrt{3}$.

**801.** $a = \frac{R}{3}\sqrt{6\sqrt{3}\,\pi}$.

802. Обозначая катеты прямоугольного треугольника через $a$ и $b$, гипотенузу через $c$, находим:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

или

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

т. е.

$$\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

что и требовалось доказать.

803. Обозначим площади луночек Гиппократа через $M$ и $N$, площади сегментов, заключенных между большим кругом и катетами $a$ и $b$ прямоугольного треугольника $ABC$, — через $m$ и $n$ (рис. 38).

По предыдущей теореме имеем:

$$\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

т. е.

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

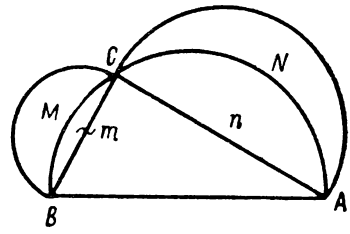



Рис. 38.

Если из площади большего полукруга $\frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2$ вычесть сумму площадей сегментов $m + n$, получим площадь прямоугольного треугольника $ABC$ (обозначим ее через $S$).

Вычитая $m + n$ из суммы площадей полукругов, построенных на катетах,

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

получим сумму площадей $M + N$.

Итак,

$$M + N = S,$$

что и требовалось доказать.

804. Имеем (рис. 39): $AO = AO_1\sqrt{2}$; $AO_1 = \frac{1}{2}AB$,

$$\angle AOC = \angle \frac{AO_1D}{2}.$$

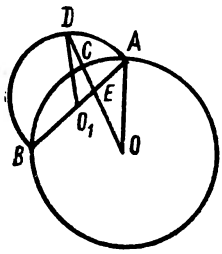



Рис. 39.

Площадь сектора $OAC$ равна площади сектора $O_1AD$, т. е.

$$\text{пл. } \triangle OAE + \text{пл. } AEC = \text{пл. } \triangle O_1ED + \text{пл. } AEC + \text{пл. } ACD,$$

откуда пл. $ACD$ = пл. $\triangle AOE$ — пл. $\triangle O_1ED$.

Разность площадей двух треугольников, а следовательно, и площадь квадрата, равную этой разности, всегда можно построить с помощью циркуля и линейки; площадь полученного квадрата и будет равна площади криволинейного треугольника, что и требовалось показать.

**805.** Обозначим радиус круга $R$, сторону квадрата $a_4$ и сторону равностороннего треугольника $a_3$.

Следовательно,

$$\pi R^2 = a_4^2 = \frac{a_3^2\sqrt{3}}{4},$$

откуда

$$a_4 = R\sqrt{\pi}, \quad a_3 = \frac{2R\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}.$$

Отношение периметров

$$2\pi R : 4a_4 : 3a_3.$$

**Ответ.** $\sqrt{\pi} : 2 : \sqrt[4]{27}$.

**806.** Искомая площадь равна площади ромба $ONCM$ без площади сектора $ONmMO$ (рис. 40). Ромб состоит из двух равносторонних треугольников со стороной $r$, а площадь сектора равна $\frac{1}{6}$ части площади круга; отсюда искомая площадь

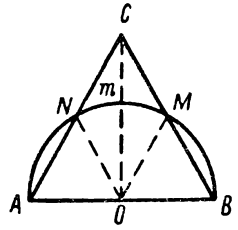


Рис. 40.

$$S = \frac{1}{2}r^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi r^2.$$

**Ответ.** $S = \frac{r^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$.

**807.** Искомая площадь $Q$ равна площади равностороннего треугольника $ABC$ без утроенной площади сектора $Anm$ (рис. 41). Если обозначим радиус вписанной окружности через $r$, тогда $AB = 2r$, откуда:

$$Q = \frac{1}{4}(2r)^2\sqrt{3} - 3\cdot\frac{1}{6}\pi r^2 = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right).$$

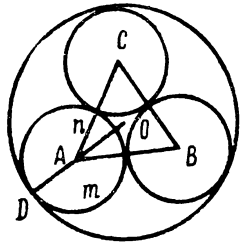


Рис. 41.

Вычислим $r : a_3 = OA\sqrt{3}$;

но

$$OA = OD - AD = R - r,$$

отсюда

$$2r = (R - r)\sqrt{3},$$

т. е.

$$r = R(2\sqrt{3} - 3),$$

Подставив значение $r$ в найденное выражение, находим:

**Ответ.** $Q = 3R^2(7 - 4\sqrt{3})\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$.

**808.** Обозначим искомый радиус круга $R$. Легко понять, что центры четырех касающихся кругов образуют квадрат со стороной $2R$ и диагональю $2(R + r)$. Но сторона квадрата равна радиусу описанной окружности, умноженной на $\sqrt{2}$:

$$a_4 = R_1\sqrt{2},$$

следовательно,

$$2R = (R + r)\sqrt{2},$$

откуда $R = r(1 + \sqrt{2})$.

Искомая площадь

$$S = \pi(3 + 2\sqrt{2})r^2.$$

**810.** $Q = \frac{2}{3}R^2(3\sqrt{3} - \pi)$.

**811.** Обозначим ширину кольца $z$, радиусы данных кругов $r$. Докажем, что $z = r$. В самом деле: площадь кольца

$$\pi(3r + z)^2 - \pi(3r)^2 = 7\pi r^2,$$

или, после преобразования, получим:

$$z^2 + 6rz - 7r^2 = 0,$$

откуда

$$z = r,$$

что и требовалось доказать.

**812.** Указание. Искомая площадь $AFDHCB$

$$S = \pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}(AD^2 + DC^2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}[AC^2 - (AD^2 + DC^2)];$$

но

$$AC = AD + DC,$$

$$AD \cdot DC = BD^2;$$

следовательно, $S = \frac{\pi}{4}AD \cdot DC = \pi\left(\frac{BD}{2}\right)^2$.

**813.** 1) Можно рассматривать площадь кольца как среднее геометрическое между площадью данного круга и площадью искомого круга. Обозначим $x$ — радиус меньшего круга; тогда:

$$\frac{\pi R^2}{\pi(R^2 - x^2)} = \frac{\pi(R^2 - x^2)}{\pi x^2},$$

т. е.

$$x^2 + Rx - R^2 = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{R}{2}(1 \pm \sqrt{5}),$$

$$x^2 - Rx - R^2 = 0, \quad x_{3,4} = \frac{R}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Из четырех значений $x$ достаточно взять положительные, при этом

$$x_1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) < R,$$

$$x_2' = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1) > R;$$

$x_1$ является решением задачи; $x_2' > R$ не является решением задачи.

2) Можно рассматривать площадь искомого круга как среднее геометрическое между площадью данного круга и площадью кольца:

$$\frac{\pi R^2}{\pi x^2} = \frac{\pi x^2}{\pi (R^2 - x^2)},$$

т. е.

$$x^4 + R^2x^2 - R^4 = 0.$$

Из четырех корней этого уравнения условию задачи удовлетворяет один из корней

$$x_2 = \sqrt{\frac{R^2}{2}(\sqrt{5}-1)} = \sqrt{R \cdot \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)}.$$

Итак, длина найденного радиуса является средним геометрическим между длиной радиуса данного круга $R$, длиной большего отрезка этого радиуса, разделенного в крайнем и среднем отношении.

**Ответ.** $x_1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, $x_2 = \frac{R}{2}\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$.

## § 14. ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

**814.** Обозначим ребро куба $x$, диагональ основания $y$; тогда $y = x\sqrt{2}$.

Площадь диагонального сечения

$$S = xy = x^2\sqrt{2},$$

откуда находим:

ребро куба $x = \sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{2}}$;

диагональ основания $y = \sqrt{S\sqrt{2}}$;

диагональ куба $d = \sqrt{\frac{3S\sqrt{2}}{2}}$;

полная поверхность куба $S_1 = 3S\sqrt{2}$;

объем куба $V = \frac{1}{2}\sqrt{S^3\sqrt{2}}$.

**815.** Найдем длину диагонали основания $d$. Из равенства $Q = \frac{1}{2} ad$ находим $d = \frac{2Q}{a}$. Но квадрат диагонали квадрата равен удвоенной его площади, следовательно, площадь основания пирамиды

$$S = \frac{2Q^2}{a^2},$$

поэтому ее объем

$$V = \frac{2Q^2}{3a}.$$

**Ответ.** $V = \frac{2}{3} \frac{Q^2}{a}$.

**816.** Данную задачу легче решать, приняв за основание пирамиды одну из боковых граней, например $ASB$. Если обозначим $AS = x$, $BS = y$ и $CS = z$, то искомый объем выразится так:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{xy}{2} \cdot z = \frac{xyz}{6}.$$

Из прямоугольных треугольников $BSC$, $ASC$ и $ASB$ составим систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + z^2 = b^2, \\ x^2 + y^2 = c^2, \end{cases}$$

откуда

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)},$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)},$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)}.$$

**Ответ.**

$$V = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}.$$

**817.** Указание. По формуле Герона найти площадь треугольника $ABC$:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{abc}{6} = \frac{ON \cdot S}{3},$$

откуда

$$ON = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}},$$

что и требовалось доказать.

818. Обозначим $SB = x$, $SC = y$, $SD = z$.

Рассмотрим треугольник $SBD$; $SM$ — медиана этого треугольника (см. № 715):

$$SM = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 2y^2 - BD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 2z^2 - a^2}. \quad (1)$$

Аналогично из треугольника $SAC$ находим:

$$SM = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2y^2 - AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2y^2 - 3a^2}, \quad (2)$$

так как $BD = a$; $AC^2 = 4a^2 - BD^2 = 3a^2$.

Из соотношений (1) и (2) находим:

$$y^2 = x^2 + z^2,$$

что и требовалось доказать.

819. На рис. 42 дано сечение пирамиды по диагонали основания.

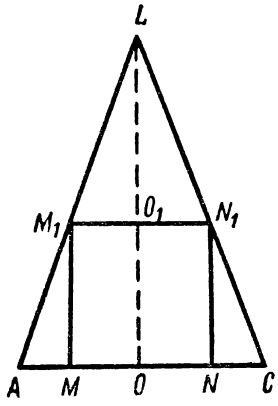


Рис. 42.

Из подобия треугольников $OLC$ и $O_1LN_1$ находим:

$$\frac{OL}{O_1L} = \frac{OC}{O_1N_1}, \quad (1)$$

где $OL = H$; $O_1L = H - x$; $O_1N_1 = \frac{x}{\sqrt{2}}$; $OC = \sqrt{a^2 - H^2}$; $NN_1 = x$ — ребро куба.

Подставляя эти значения в соотношение (1), получим

$$\frac{H}{H - x} = \frac{\sqrt{a^2 - H^2}\cdot\sqrt{2}}{x}.$$

**Ответ.** $x = \dfrac{H\sqrt{2(a^2 - H^2)}}{H + \sqrt{2(a^2 - H^2)}}$.

820. Указание. Решение аналогично предыдущему.

**Ответ.** $x = \dfrac{60(6\sqrt{2} - 5)}{47}$.

821. Указание. Ребро куба $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

**Ответ.** $S = \dfrac{3}{4}a^2$; $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{32}$.

**822.** Указание. Развертка конуса представляет сектор, у которого радиус равен образующей конуса $l$, а длина дуги равна длине окружности основания конуса $2\pi R$ (где $R$ — радиус основания конуса) Поэтому

$$\frac{\pi l \cdot 36}{180} = 2\pi R,$$

откуда

$$l = 10R.$$

Боковая поверхность конуса

$$S = \pi R l = 10\pi R^2,$$

откуда

$$R = \sqrt{\frac{S}{10\pi}}.$$

Высота конуса

$$H = \sqrt{l^2 - R^2} = R\sqrt{99}; \qquad H = \sqrt{\frac{9{,}9S}{\pi}}.$$

**Ответ.** $V = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{1{,}1S^3}{\pi}}$.

**823.** Обозначая длину образующей конуса и его радиус основания соответственно через $l$ и $r$, составим, согласно условию задачи, равенство:

$$\pi r l = 2\pi r^2,$$

откуда

$$l = 2r,$$

т. е. осевое сечение конуса есть равносторонний треугольник.

Развертка конуса — это круговой сектор с радиусом, равным $l$, и длиной дуги, равной $2\pi r$. Обозначая угол развертки $\alpha$, составим равенство:

$$\frac{\pi l \alpha}{180^\circ} = 2\pi r,$$

откуда

$$a = \frac{2r \cdot 180^\circ}{l} = 180^\circ,$$

так как $l = 2r$.

**Ответ.** $\alpha = 180^\circ$.

**824.** Объем тела вращения равен сумме объемов двух конусов:

$$V_т = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

где

$$H = \frac{a}{2}, \qquad R = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

следовательно,

$$V_т = \frac{1}{4}\pi a^3.$$

**Ответ.** $V_т = \frac{\pi a^3}{4}$.

**825.** См. предыдущую задачу $\left(\text{здесь } R = b;\ H = \frac{a}{2}\right)$.

**Ответ.** $V_т = \frac{1}{3}\pi a b^2$.

**826.** Обозначим высоты треугольника $h_a$, $h_b$ и $h_c$, объемы тел, получаемых от вращения треугольника вокруг сторон $a$, $b$ и $c$, соответственно через $V_a$, $V_b$ и $V_c$.

При вращении треугольника вокруг любой из сторон объем будет равен сумме (или разности) объемов двух конусов и выразится следующими равенствами:

$$V_a = \frac{1}{3}\pi h_a^2 \cdot a;$$

$$V_b = \frac{1}{3}\pi h_b^2 \cdot b;$$

$$V_c = \frac{1}{3}\pi h_c^2 \cdot c.$$

Обозначая площадь данного треугольника буквой $S$, составим равенства:

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S.$$

Сделав соответствующую замену, находим:

$$V_a = \frac{2}{3}\pi S h_a;$$

$$V_b = \frac{2}{3}\pi S h_b;$$

$$V_c = \frac{2}{3}\pi S h_c.$$

Отсюда искомые отношения:

$$V_a : V_b : V_c = h_a : h_b : h_c.$$

Принимая во внимание, что в каждом треугольнике высоты обратно пропорциональны их сторонам, находим:

$$V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

**827.** Объем тела вращения вокруг стороны $a$ равен сумме или разности объемов двух конусов, у которых радиусом основания служит $h_a$ и высотой $a$; поэтому:

$$\frac{1}{3}\pi a h_a^2 = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

или

$$a h_a^2 = 4R^3. \tag{1}$$

Обозначим площадь треугольника $ABC$ через

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) находим:

$$a = \frac{S^2}{R^3}. \tag{3}$$

Аналогично выразим две другие стороны треугольника $ABC$ через $S$. Имеем:

$$b = \frac{S^2}{r^3}, \tag{4}$$

$$c = \frac{S^2}{\rho^3}. \tag{5}$$

Вычислим $S^2$ по формуле:

$$S^2 = p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c).$$

Но

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{S^2}{2}\left(\frac{1}{R^3}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{\rho^3}\right),$$

$$p-a = \frac{S^2}{2}\left(\frac{1}{r^3}+\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\right),$$

$$p-b = \frac{S^2}{2}\left(\frac{1}{R^3}+\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r^3}\right),$$

$$p-c = \frac{S^2}{2}\left(\frac{1}{R^3}+\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}\right).$$

Перемножая почленно эти равенства и упрощая, получим:

$$S^2 = \frac{S^8}{16}\cdot k,$$

или

$$S^2 = 2\sqrt[3]{\frac{2}{k}},$$

где $k = \left(\frac{1}{R^3} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{\rho^3}\right)\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3}\right)\left(\frac{1}{R^3} + \frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r^3}\right) \times$
$\times \left(\frac{1}{R^3} + \frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}\right)$.

Подставляя значение $S^2$ в формулы (3), (4) и (5), находим стороны искомого треугольника:

$$a = \frac{2}{R^3}\sqrt[3]{\frac{2}{k}}; \quad b = \frac{2}{r^3}\sqrt[3]{\frac{2}{k}}; \quad c = \frac{2}{\rho^3}\sqrt[3]{\frac{2}{k}},$$

если задача имеет решение.

**828.** Решение 1-е. Допустим, что правильный шестиугольник $ABCDEF$ вращается вокруг стороны $AB$. Искомая поверхность тела вращения равна сумме боковых поверхностей: цилиндра с образующей $DE$, двух усеченных конусов с образующими $CD$ и $EF$, двух конусов с образующими $BC$ и $AF$.

Пусть $BD = d$; тогда $NC = \frac{1}{2}d$.

Искомая поверхность тела вращения

$$S = 2\pi da + 2\pi\left(d + \frac{d}{2}\right)a + 2\pi\frac{d}{2}a = 6\pi ad = 6\sqrt{3}\pi a^2,$$

где $d = a\sqrt{3}$ как диаметр вписанного в шестиугольник круга.

Объем тела вращения равен объему цилиндра с радиусом $d$ и высотой $a$ плюс объемы двух усеченных конусов, радиусы которых $d$ и $\frac{d}{2}$ и высота $\frac{a}{2}$ без двух объемов конусов с радиусом $\frac{d}{2}$ и высотой $\frac{a}{2}$.

$$V = \pi ad^2 + \frac{2}{3}\pi\left(d^2 + d\cdot\frac{d}{2} + \frac{d^2}{4}\right)\frac{a}{2} -$$
$$- \frac{2}{3}\pi\cdot\frac{a}{2}\frac{d^2}{4} = \frac{9}{2}\pi a^3.$$

Решение 2-е. Задачи такого типа можно решать, применяя следующие две теоремы Гульдина:

1) поверхность тела, полученного при вращении дуги данной плоской кривой (плоской ломаной) вокруг некоторой оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равняется произведению длины вращающейся дуги (ломаной) на длину пути описанного при этом вращении центром тяжести дуги;

2) объем тела, получаемого при вращении плоской фигуры вокруг некоторой оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равен произведению площади вращающейся фигуры на длину пути, описанного при вращении ее центра тяжести (доказать самостоятельно).

Центр тяжести вращающегося шестиугольника совпадает с его центром; длина пути, описываемого центром тяжести при вращении вокруг стороны $AB$, равна

$$2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \pi a\sqrt{3}.$$

Искомая поверхность тела вращения, по первой теореме Гульдина,

$$S = 6a \cdot \pi a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\pi a^2,$$

искомый объем тела вращения, по второй теореме Гульдина,

$$V = \frac{3}{2} a^2\sqrt{3} \cdot \pi a\sqrt{3} = \frac{9}{2}\pi a^3.$$

**Ответ.** $S = 6\sqrt{3}\pi a^2$; $V = \frac{9}{2}\pi a^3$.

829. $V_т = \pi a^3$; $V_т : V_ш = 3 : 4$.

830. Поверхность тела вращения состоит из суммы боковых поверхностей двух равных усеченных конусов и двух равных внутренних конусов.

Радиус большего основания усеченного конуса равен большей диагонали ромба:

$$R = 2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{3}.$$

Радиус меньшего основания усеченного конуса и внутреннего конуса

$$r = \frac{R}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Образующие конусов равны $a$.

Отсюда искомая поверхность тела вращения

$$S = 4\pi a^2\sqrt{3}.$$

Искомый объем тела вращения

$$V = \frac{3}{2}\pi a^3.$$

Р е ш е н и е 2-е. Центр тяжести вращающегося ромба находится в точке пересечения диагоналей: длина пути, описываемая центром тяжести, равна

$$2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \pi a\sqrt{3}.$$

Искомая поверхность и объем тела вращения (см. № 828):

$$S = 4a \cdot \pi a \sqrt{3} = 4\sqrt{3}\pi a^2,$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \pi a \sqrt{3} = \frac{3}{2}\pi a^3.$$

**Ответ.** $S = 4\sqrt{3}\pi a^2$, $V = \frac{3}{2}\pi a^3$.

831. Указание. По первой теореме Гульдина поверхность тела вращения (см. № 828)

$$S = 6a \cdot 2\pi a = 12\pi a^2.$$

По второй теореме Гульдина объем тела вращения

$$V = \frac{3}{2} a^2\sqrt{3} \cdot 2\pi a = 3\sqrt{3}\pi a^3.$$

**Ответ.** $S = 12\pi a^2$, $V = 3\sqrt{3}\pi a^3$.

832. $S = \dfrac{4\pi(a+b)ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $V = \dfrac{2\pi a^2 b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

833. Указание. Обозначим стороны параллелограмма $a$ и $b$, соответствующие высоты — $h$ и $h_1$, $V$ и $V_1$ — объемы тел, полученных при вращении параллелограмма соответственно около сторон $a$ и $b$,

$$V = \pi a h^2, \quad V_1 = \pi b h_1^2.$$

По условию $ah = bh_1$, поэтому

$$\frac{V}{V_1} = \frac{ah^2}{bh_1^2} = \frac{h}{h_1} = \frac{b}{a}.$$

**Ответ.** $\dfrac{V}{V_1} = \dfrac{h}{h_1} = \dfrac{b}{a}$.

834. Искомая поверхность тела вращения равна сумме поверхности усеченного конуса и боковой поверхности внутреннего конуса без площади основания последнего.

Радиус нижнего основания усеченного конуса $R = a$, радиус его верхнего основания

$$r = b + \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}(a+b),$$

радиус основания внутреннего конуса

$$r_1 = \frac{1}{2}(a-b),$$

образующие конусов равны $c$.

Отсюда поверхность тела вращения

$$S_т = \pi (R + r) l + \pi R^2 + \pi r^2 + \pi r_1 l - \pi r_1^2 =$$

$$= \pi \left[ \left( a + \frac{a+b}{2} \right) c + a^2 + \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{a-b}{2} c - \left( \frac{a-b}{2} \right)^2 \right] =$$

$$= \pi (2ac + a^2 + ab) = \pi a (a + b + 2c).$$

**838.** $R_т = \frac{a\sqrt{6}}{4}$, $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$; $R_г = a\sqrt{3}$, $r = \frac{a}{2}$; $R_о = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$; $R_д = \frac{a}{4}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}$, $r = \frac{a}{2} \times \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$; $R_и = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, $r = \frac{a}{12}\sqrt{3} \times (3 + \sqrt{5})$.

**839.** $S_т = a^2\sqrt{3}$, $S_г = 6a^2$, $S_о = 2\sqrt{3}\, a^2$, $S_д = 3a^2 \times \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$, $S_и = 5\sqrt{3} a^2$.

**840.** $V_т = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$, $V_г = a^3$, $V_о = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$, $V_д = \frac{a^3}{4} \times \sqrt{10(47 + 21\sqrt{5})}$, $V_и = \frac{5a^3(3 + \sqrt{5})}{12}$.

**841.** Известно, что полные поверхности правильного тетраэдра и октаэдра соответственно равны (см. № 839):

$$a^2\sqrt{3} \text{ и } 2\sqrt{3} a_1^2;$$

по условию

$$a^2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} a_1^2; \quad a^2 = 2a_1^2,$$

откуда

$$a = \sqrt{2} a_1.$$

Объемы тетраэдра и октаэдра соответственно равны (см. № 840):

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \text{ и } V_1 = \frac{a_1^3\sqrt{2}}{3};$$

отношение этих объемов

$$\frac{V}{V_1} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4a_1^3\sqrt{2}} = \frac{a^3}{4a_1^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Ответ.** $V : V_1 = \sqrt{2} : 2$.

**842.** Указание. Радиус вписанного шара (см. № 838)

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

**Ответ.** $S = \frac{2}{3}\pi a^2$, $V = \frac{\pi\sqrt{6}\,a^3}{27}$.

**843.** Рассмотрим один правильный тетраэдр (рис. 43). Высота тетраэдра

$$DO = H = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

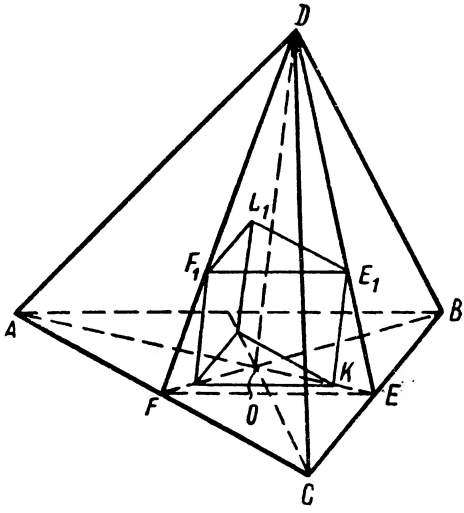



Рис. 43.

где $AO = R = \frac{a}{\sqrt{3}}$;

$$EF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

Из подобия треугольников $EDF$ и $E_1DF_1$ имеем:

$$\frac{E_1F_1}{EF} = \frac{DE_1}{DF} = \frac{\frac{2}{3}DE}{DE} = \frac{2}{3},$$

откуда

$$E_1F_1 = \frac{2}{3}EF = \frac{a}{3},$$

следовательно, площадь основания призмы

$$S = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{36}.$$

Из подобия треугольников $DOE$ и $E_1KE$ имеем:

$$\frac{E_1K}{H} = \frac{E_1E}{DE} = \frac{\frac{1}{3}DE}{DE} = \frac{1}{3},$$

откуда

$$E_1K = \frac{1}{3}H = \frac{a\sqrt{6}}{9}.$$

Высота вписанной призмы

$$H_1 = 2 \cdot E_1K = \frac{2a\sqrt{6}}{9}.$$

Объем вписанной призмы

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{36} \cdot \frac{2a\sqrt{6}}{9} = \frac{a^3\sqrt{2}}{54}.$$

**Ответ.** $V = \frac{\sqrt{2}}{54} a^3$.

**844.** $\frac{6}{\pi}$.

**845.** Указание. Радиус вписанного в правильный икосаэдр шара (см. № 838)

$$r = \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}.$$

Объем вписанного шара

$$V_{ш} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}(3+\sqrt{5})^3}{432}.$$

Объем правильного икосаэдра (см. № 840)

$$V_{и} = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}.$$

**Ответ.** $\frac{V_{и}}{V_{ш}} = \frac{15\sqrt{3}(7-3\sqrt{5})}{2\pi}$.

**846.** Опишем произвольный многогранник вокруг данного шара радиуса $R$ и разложим его на пирамиды, взяв вершины всех этих пирамид в центре шара. Объем каждой такой пирамиды равен площади грани многогранника (основания пирамиды), умноженной на треть радиуса $R$. Объем описанного многогранника равен

$$V = S \cdot \frac{R}{3},$$

где $S$ — площадь поверхности описанного многогранника.

Из последнего соотношения находим, что

$$\frac{V}{S} = \frac{R}{3},$$

что и требовалось доказать.

**Ответ.** $V : S = R : 3$.

**847.** Указание. Обозначая ребро правильного октаэдра $a$, находим, что радиус описанного шара (см. № 838)

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Поверхность описанного шара

$$Q = 4\pi R^2 = 2\pi a^2.$$

Поверхность правильного октаэдра (см. № 839)

$$S = 2a^2\sqrt{3}.$$

Исключая из последних двух соотношений $a^2$, находим

$$S = \frac{Q\sqrt{3}}{\pi}.$$

**Ответ.** $S = \frac{Q\sqrt{3}}{\pi}$.

848. $V = \frac{\pi\sqrt{3}\,a^3}{54}$; $S = \frac{\pi a^2}{3}$.

849. Указание. Выразив полную поверхность и объем конуса через радиус шара, получим:

$$S_к = 8\pi R^2; \quad V_к = \frac{8}{3}\pi R^3.$$

850. Указание. Отношение площадей оснований усеченного конуса известно; обозначая через $R_1$ и $r$ радиусы большего и меньшего оснований конуса, находим:

$$\frac{R_1^2}{r^2} = 2, \quad R_1 = r\sqrt{2}.$$

Образующая усеченного конуса (используя свойство сторон описанного четырехугольника) равна $R_1 + r = r(\sqrt{2}+1)$; высота конуса $2R$; проекция образующей на основание конуса равна

$$R_1 - r = r(\sqrt{2}-1).$$

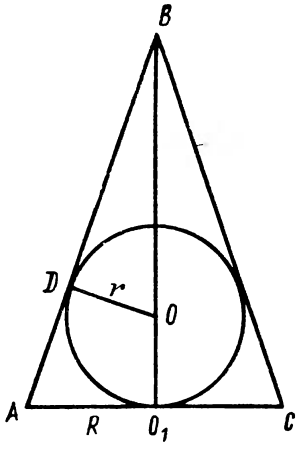


Рис. 44.

Следовательно,

$$[r(\sqrt{2}+1)]^2 = 4R^2 + [r(\sqrt{2}-1)]^2,$$

откуда

$$r^2 = \frac{R^2\sqrt{2}}{2}.$$

**Ответ.** $V = \frac{\pi R^3}{3}(3\sqrt{2}+2)$.

**851.** Если произвольно описывать конусы около шара, то заметим, что объемы их зависят от высоты и радиуса основания; существуют такие значения этих величин, когда объем конуса будет наименьшим. Обозначим через $R$ и $H$ радиус основания и высоту конуса; тогда искомый объем конуса (рис. 44)

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

Из подобия треугольников $ABO_1$ и $DBO$ находим:

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{\sqrt{H(H-2r)}},$$

откуда

$$R^2 = \frac{r^2 H}{H-2r}.$$

Следовательно, $V = \frac{\pi}{3} \frac{r^2H^2}{H-2r} = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{H^2}{H-2r}$.

Наименьшее значение $V$ соответствует наименьшему значению $\frac{H^2}{H-2r}$ или наибольшему значению обратного выражения.

Преобразуем обратное выражение так:

$$\frac{H-2r}{H^2} = \frac{1}{H} \cdot \left(1 - \frac{2r}{H}\right) = \frac{1}{2r} \cdot \frac{2r}{H} \cdot \left(1 - \frac{2r}{H}\right).$$

Данное выражение будет наибольшим, когда сомножители $\frac{2r}{H}$ и $1 - \frac{2r}{H}$ равны между собой (см. № 703), т. е.

$$\frac{2r}{H} = 1 - \frac{2r}{H},$$

откуда $H = 4r = 2(2r)$.

Итак, описанный вокруг шара конус имеет наименьший объем, когда его высота равна удвоенному диаметру шара.

**Ответ.** $V = \frac{8}{3}\pi r^3$.

**852.** Обозначим через $r$ и $h$ соответственно радиус и высоту вписанного цилиндра. Тогда объем искомого цилиндра

$$V = \pi r^2 h.$$

Из треугольника $AOO_1$ (рис. 45) находим:

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4},$$

откуда $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$;
следовательно,

$$V = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

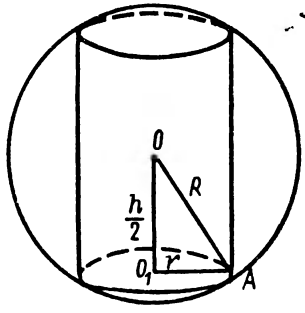


Рис. 45.

Если сделать следующие преобразования:

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{V}{2\pi}\right)^2 = \frac{r^4}{4}(R^2 - r^2 = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot (R^2 - r^2),$$

то увидим, что сумма трех сомножителей постоянна и равна $R^2$ поэтому (см. № 703) объем $V$ принимает наибольшее значение, если

$$\frac{r^2}{2} = R^2 - r^2,$$

откуда

$$r = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

**Ответ.** $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$; $V = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

853. $\frac{32}{9}$.

854. Указание. Составив систему уравнений

$$\begin{cases} V = \frac{\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr)\,h \\ m^2 = (R + r)\,h \end{cases}$$

и решив ее, находим искомые радиусы $R$ и $r$.

**Ответ.** $R = \frac{1}{2h}\left(m^2 + \sqrt{\frac{3\,(4hV - \pi m^4)}{\pi}}\right)$;

$$r = \frac{1}{2h}\left(m^2 - \sqrt{\frac{3\,(4hV - \pi m^4)}{\pi}}\right).$$

855. Обозначим: $H$ — искомая высота конуса, $l$ — образующая конуса, $r$ — радиус основания конуса.

По условию задачи

$$\pi rl = 3\pi r^2,$$

откуда

$$l = 3r.$$

По теореме Пифагора

$$H^2 + r^2 = l^2,$$

или

$$H^2 + r^2 = 9r^2,$$

т. е.

$$r^2 = \frac{H^2}{8}.$$

В данном случае объемы металлического шара и металлического конуса равновелики, т. е.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 H.$$

Заменяя $r^2$ его значением, имеем:

$$4R^3 = \frac{1}{8} H^3,$$

откуда искомая высота конуса

$$H = 2\sqrt[3]{4}R.$$

**856.** Обозначая через $r$, $l$ и $H$ соответственно радиус основания, образующую и высоту конуса, имеем:

$$\pi rl = 60. \tag{1}$$

Вычислим полную поверхность конуса (т. е. площадь треугольника по трем сторонам):

$$S = \sqrt{21\,(21-15)\,(21-14)\,(21-13)} = 84,$$

поэтому

$$\pi r^2 + 60 = 84,$$

откуда

$$r^2 = \frac{24}{\pi}, \tag{2}$$

следовательно, из соотношений (1) и (2) находим:

$$l^2 = \frac{150}{\pi}. \tag{3}$$

Кроме того,

$$H^2 = l^2 - r^2,$$

откуда, учитывая соотношения (2) и (3), получим:

$$H = \sqrt{\frac{126}{\pi}}.$$

Обозначая искомый радиус шара $R$, находим соотношение:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 H,$$

т. е.

$$R^3 = \frac{6}{\pi}\sqrt{\frac{126}{\pi}}, \quad R = \sqrt[6]{\frac{36\cdot 126}{\pi^3}}.$$

Прологарифмируем это выражение:

$$\frac{1}{6}\lg 36 = 0{,}2594;$$

$$\frac{1}{6}\lg 126 = 0{,}3501;$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{colg}\pi = 1{,}7516;$$

$$\lg R = 0{,}3611.$$

**Ответ.** $R \approx 2{,}3$ *м*.

857. Обозначая через $R$ и $r$ соответственно радиусы основания конуса и шара, имеем:

$$R : r = n, \quad R = nr; \quad V_к : V_ш = m, \quad V_к = mV_ш;$$

или

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H = m \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$n^2 r^2 H = 4mr^3,$$

откуда

$$r = \frac{Hn^2}{4m}, \quad R = \frac{Hn^3}{4m}.$$

Кроме того,

$$l^2 = H^2 + R^2,$$

т. е. длина образующей

$$l = \frac{H}{4m}\sqrt{16m^2 + n^6}.$$

Из подобия треугольников ($\triangle ADS \sim \triangle KOS$) находим (рис. 46):

$$\frac{OS}{l} = \frac{r}{R},$$

отсюда искомое расстояние $OS = \dfrac{rl}{R}$.

**Ответ.** $OS = \dfrac{H}{4mn}\sqrt{16m^2 + n^6}$.

858. На рис. 46 изображено осевое сечение конуса с данным шаром радиуса $r$ и уровнем воды в конусе $AB$. Треугольник $ABS$ равносторонний, следовательно

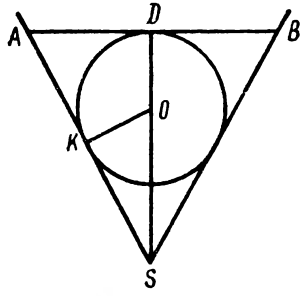


Рис. 46.

$$AB = AS = BS = 2r\sqrt{3}$$

$$AD = r\sqrt{3},$$

$$DS = \sqrt{AS^2 - AD^2} = 3r.$$

Отсюда искомый объем воды в конусе

$$V = V_к - V_ш = \frac{1}{3}\pi AD^2 \cdot DS - \frac{4}{3}\pi r^3 =$$

$$= 3\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{5}{3}\pi r^3$$

Этот объем воды имеет форму конуса и после удаления шара, поэтому полученный конус будет подобен первоначальному. Но объемы подобных конусов относятся, как кубы их высот или радиусов. Обозначая искомую высоту конуса $h$, имеем:

$$V : V_к = h^3 : DS^3,$$

т. е.

$$\frac{5}{3}\pi r^3 : 3\pi r^3 = h^3 : 27r^3,$$

откуда искомая высота конуса

$$h = r\sqrt[3]{15}.$$

859. Указание. Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Определить первоначальный объем воды в конусе $V_1$. Из подобия треугольников $BOS$ и $DO_1S$ (рис. 47) находим:

$$\frac{r_1}{R} = \frac{h}{H}; \quad r_1 = \frac{Rh}{H}.$$

$$V_1 = \frac{\pi r_1^2 h}{3} = \frac{\pi R^2 h^3}{3H^2}.$$

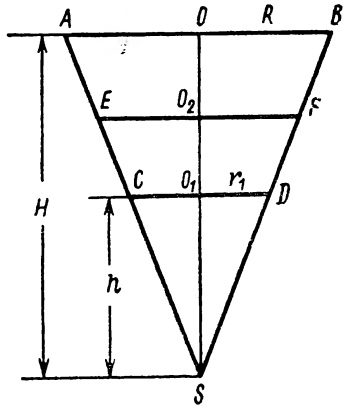


Рис. 47.

Объем воды после погружения в нее шара:

$$V = V_1 + V_{\text{ш}}. \qquad (1)$$

Обозначая искомую высоту $O_2S = x$, радиус $O_2F = r_2$, из подобия треугольников $BOS$ и $FO_2S$ находим:

$$\frac{r_2}{R} = \frac{x}{H}; \quad r_2 = \frac{Rx}{H},$$

$$V = \frac{\pi}{3} r_2^2 x = \frac{\pi R^2 x^3}{3H^2}.$$

Если в соотношении (1) $V$, $V_1$ и $V_{\text{ш}}$ заменить их значениями, получим уравнение, из которого, после очевидных преобразований, находим искомую высоту.

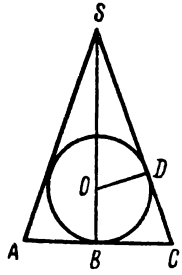


Рис. 48

**Ответ.** $x = \sqrt[3]{h^3 + \frac{4H^2r^3}{R^2}}$.

860. Обозначим через $R$, $l$ и $H$ соответственно радиус основания, образующую и высоту конуса (рис. 48).

По условию

$$\pi R\,(R + l) = 4\pi r^2 \cdot k. \qquad (1)$$

Кроме того (рис. 48),

$$H^2 = l^2 - R^2. \qquad (2)$$

Из подобия треугольников $BCS$ и $ODS$ находим:

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{l - R}.$$

Учитывая соотношение (2), получим:

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{l^2 - R^2}}{l - R} = \sqrt{\frac{l + R}{l - R}},$$

и, освобождаясь от радикала, напишем производную пропорцию

$$\frac{R^2+r^2}{R^2-r^2}=\frac{l}{R}.$$

Заменяя в последнем соотношении из равенства (1) значение

$$l=\frac{4r^2k-R^2}{R}, \tag{4}$$

получим

$$\frac{R^2+r^2}{R^2-r^2}=\frac{4r^2k-R^2}{R^2},$$

или

$$R^4-2r^2kR^2+2r^4k=0,$$

откуда

$$R^2=r^2\left(k\pm\sqrt{k^2-2k}\right). \tag{5}$$

Следовательно, из соотношений (2), (4) и (5) находим:

$$H^2=4r^2\left(k\mp\sqrt{k^2-2k}\right)^2.$$

**Ответ.** $H=2r\left(k\mp\sqrt{k^2-2k}\right)$.

**861.** На рис. 49 дан разрез осевого сечения конуса и шаров. Объемы двух шаров относятся, как кубы их радиусов, поэтому, обозначая радиус большего шара $R$, имеем:

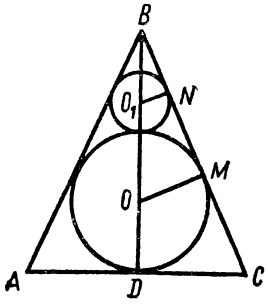


Рис. 49.

$$\frac{r^3}{R^3}=\frac{1}{8},$$

откуда

$$R=2r.$$

Рассматривая треугольник $BOM$, находим, что $O_1N$ есть его средняя линия, откуда следует, что $BO_1=O_1O=3r$, а вся высота конуса $H=8r$.

Из подобия треугольников $BDC$ и $BO_1N$ находим:

$$\frac{DC}{BC}=\frac{O_1N}{BO_1},$$

т. е.

$$\frac{R_1}{l}=\frac{r}{3r},\quad l=3R_1,$$

где $R_1=DC$; $l=BC$.

Но

$$l^2 - R_1^2 = H^2,$$

$$R_1^2 = 8r^2.$$

Боковая поверхность конуса

$$S = \pi R_1 l = 24\pi r^2.$$

Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R_1^2 H.$

**Ответ.** $S = 24\pi r^2$, $V = \frac{64\pi r^3}{3}$.

**862.** $4\pi Rr$.

**863.** Указание. Из прямоугольного треугольника $ADC$ (рис. 50) вычислим высоту цилиндра:

$$H = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}.$$

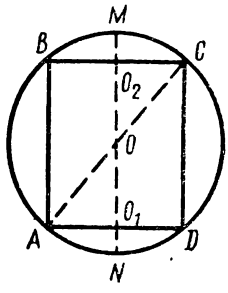


Рис. 50.

Высота сегмента

$$h = \frac{2R - H}{2} = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{3}).$$

Радиусы оснований цилиндра и сегмента

$$r = \frac{R}{2}.$$

Искомый объем оставшейся части шара равен:

$$V = V_{ш} - (2V_{с} + V_{ц}),$$

т. е.

$$V = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{2}.$$

**Ответ.** $V = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi R^3$.

**864.** Обозначим искомое расстояние $OO_1 = x < R$. Из треугольника $AO_1O$ (рис. 51) имеем:

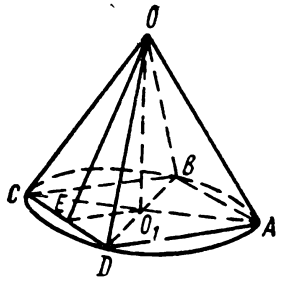


Рис. 51.

$$AO_1^2 = R^2 - x^2.$$

Площадь основания пирамиды

$$Q = 2AO_1^2 = 2(R^2 - x^2).$$

Сторона основания пирамиды

$$a = \sqrt{Q} = \sqrt{2(R^2 - x^2)}.$$

Апофема

$$l = OE = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2 + x^2}{2}}.$$

Полная поверхность пирамиды

$$2al + Q = 4m^2$$

или

$$2\sqrt{2(R^2 - x^2)}\sqrt{\frac{R^2 + x^2}{2}} + 2(R^2 - x^2) = 4m^2,$$

$$\sqrt{R^4 - x^4} + R^2 - x^2 = 2m^2,$$

т. е.

$$x^4 + (2m^2 - R^2)x^2 + 2m^2(m^2 - R^2) = 0, \quad (1)$$

или

$$z^2 + (2m^2 - R^2)z + 2m^2(m^2 - R^2) = 0, \quad (2)$$

где $z = x^2$.

Исследование. 1. Если $m^2 > R^2$, то левая часть уравнения (1) положительна при любом $x$, следовательно, задача решения не имеет.

2. Если $m^2 = R^2$, то $x = 0$, т. е. искомая плоскость сечения проходит через центр шара.

3. Если $m^2 < R^2$, то уравнение (2) имеет два корня противоположных знаков: $z_1 < 0$ и $z_2 > 0$. Следовательно, имеем одно решение задачи: $x = \sqrt{z_2}$.

**865.** $V = 370\ см^3$.

**866.** Обозначим: искомый угол — $\alpha$, высота — $h$, радиус основания — $r$, образующая — $l$. Имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{r}.$$

Полная поверхность конуса, по условию, равна удвоенной площади осевого сечения цилиндра, поэтому

$$\pi(r + l)r = 2 \cdot 2rh,$$

т. е.

$$\pi(r + l) = 4h.$$

Кроме того, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$.

Из последних двух соотношений находим:

$$4h - \pi r = \pi\sqrt{r^2 + h^2},$$

или

$$h(16 - \pi^2) = 8\pi r,$$

откуда

$$\frac{h}{r} = \frac{8\pi}{16 - \pi^2},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{8\pi}{16 - \pi^2}.$$

**Ответ.** $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{8\pi}{16 - \pi^2}$.

**867.** $60°$.

**868.** Указание. Составить три соотношения:

$$\begin{cases} S = \pi r(l + r), \\ V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h, \\ l = \sqrt{h^2 + r^2}. \end{cases}$$

Исключая из этих соотношений $h$ и $l$, находим биквадратное уравнение

$$2S\pi r^4 - S^2 r^2 + 9V^2 = 0.$$

**Ответ.** $r_{1,2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S^2 \pm \sqrt{S^4 - 72\pi SV^2}}{\pi S}}$.

**869.** $V = 1{,}4\ м^3$.

**870.** $S = 100\pi$; $V = \dfrac{500\pi}{3}$.

**871.** На рис. 52 изображено осевое сечение конуса. Если отрезок $SC$ делится в крайнем и среднем отношении, то

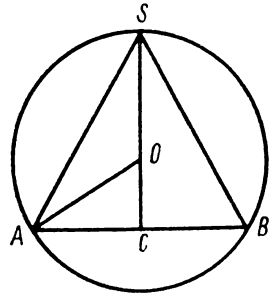


Рис. 52.

$$\frac{OS}{SC} = \frac{OC}{OS}\ ;\quad OS^2 = SC \cdot OC.$$

Имеем:

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi OS^3 = \frac{4}{3}\pi OS^2 \cdot OS = \frac{4}{3}\pi SC \cdot OC \cdot OS;$$

$$V_к = \frac{\pi}{3} \cdot AC^2 \cdot SC = \frac{\pi}{3} \cdot OC \cdot OS \cdot SC;$$

так как из треугольника $AOC$

$$AC^2 = AO^2 - OC^2 = OS^2 - OC^2 = SC \cdot OC - OC^2 = OC\,(SC - OC) = OC \cdot OS,$$

то, следовательно, $\dfrac{V_ш}{V_к} = 4$.

**Ответ.** 4.

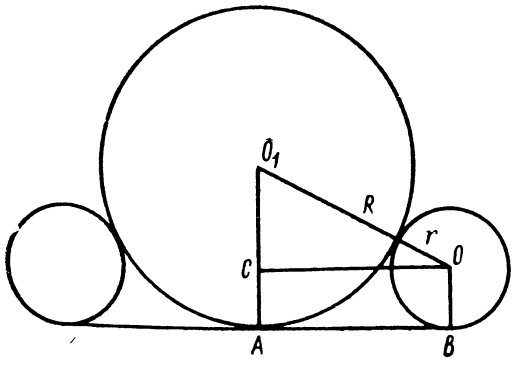


Рис. 53.

**872.** На рис. 53 дано центральное сечение тора и шара, лежащего на нем и касающегося стола в точке $A$. Обозначая радиус шара $R$, по условию

$$S = 4\pi R^2$$

откуда

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Центр тяжести вращающегося круга радиуса $r$ совпадает с его центром; длина пути, описываемого центром тяжести круга при вращении вокруг оси $O_1A$, равна

$$2\pi \cdot OC = 2\pi \sqrt{O_1O^2 - O_1C^2} =$$
$$= 2\pi \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 4\pi \sqrt{Rr}.$$

Искомая поверхность тора, по первой теореме Гульдина (см. № 828),

$$S_т = 2\pi r \cdot 4\pi \sqrt{Rr} = 8\pi^2 r \sqrt{Rr}$$

Искомый объем тора, по второй теореме Гульдина,

$$V_т = \pi r^2 \cdot 4\pi \sqrt{Rr} = 4\pi^2 r^2 \sqrt{Rr}.$$

**Ответ.** $S_т = 8\pi^2 r \sqrt{Rr}$; $V_т = 4\pi^2 r^2 \sqrt{Rr}$, где

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

873. Указание. Поверхность шара

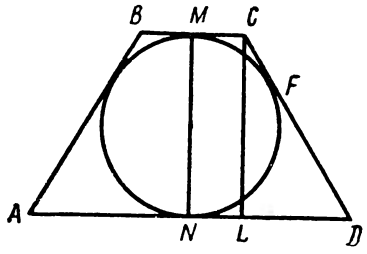


Рис. 54.

$$(2R)^2 \pi = S; \quad 2R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Боковая поверхность усеченного конуса (рис. 54)

$$S_к = \pi (ND + MC) \cdot CD =$$
$$= \pi (DF + FC) \cdot CD = \pi \cdot CD^2.$$

Но $CD^2 = (2R)^2 - LD^2 = (2R)^2 - \frac{CD^2}{4}$,

откуда $CD^2 = \frac{4}{3}(2R)^2 = \frac{4S}{3\pi}$,

следовательно, $S_к = \frac{4}{3}S$.

**Ответ.** $S_к = \frac{4}{3}S$.

874. Указание. Обозначим радиус шара — $R$, ребро куба — $a$, плотность железа и меди — $P_1$ и $P_2$.

Имеем:

$$\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{Q}{P_1 + P_2},$$

откуда радиус шара и вес тела соответственно равны:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3Q}{2\pi (P_1 + P_2)}}, \quad Q = \frac{2}{3}\pi R^3 (P_1 + P_2).$$

Ребро и объем куба:

$$a = \frac{2R}{\sqrt{3}}; \quad a^3 = \frac{4\sqrt{3}Q}{3\pi(P_1 + P_2)};$$

вес куба и опилок:

$$p = \frac{a^3}{2}(P_1 + P_2) = \frac{2\sqrt{3}Q}{3\pi}, \quad Q - p = \frac{Q(3\pi - 2\sqrt{3})}{3\pi}.$$

**Ответ.** $\frac{Q(3\pi - 2\sqrt{3})}{3\pi}$.

875. $r = R\sqrt{\frac{1-2d}{2(d_1 - d)}}$.

Часть III

# ТРИГОНОМЕТРИЯ

## § 15. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

876. 0,029.

877. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

879. Имеем:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}=7,$$

$$\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+1=7\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$$

или

$$(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2+1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=7\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$$

$$2=9\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$$

$$2=\frac{9}{4}\sin^2 2\alpha,$$

откуда

$$\sin^2 2\alpha=\frac{8}{9}.$$

**Ответ.** $\frac{8}{9}$.

880. Имеем:

$$\operatorname{tg}^2\alpha-a\operatorname{tg}\alpha+1=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-a\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=0,$$

т. е.

$$1-a\sin\alpha\cos\alpha=0,$$

откуда

$$\sin 2\alpha=\frac{2}{a}\ ;\quad (a>0).$$

Следовательно, $\cos 2\alpha=\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-4}{a^2}}$;

**Ответ.** $\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}$, так как $2\alpha<\frac{\pi}{2}$.

**881.** Имеем:

$$\frac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha\,(3\operatorname{tg}\alpha+1)}{\cos\alpha\,(1-3\operatorname{tg}\alpha)}=$$

$$=\frac{-21+1}{1+21}=-\frac{10}{11}.$$

**Ответ.** $-\frac{10}{11}$.

**882.** Из соотношения $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ находим:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Кроме того,

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=a^2,$$

откуда

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{a^2-1}{2}.$$

Следовательно,

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(2a^2-a^4+1).$$

**Ответ.** $\frac{1}{2}(2a^2-a^4+1)$.

**883.** Имеем:

$$\cos^2(\alpha+\beta)\,[a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+b\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+c]=$$

$$=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}\cdot[a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+b\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+c]=c,$$

так как по формулам Виета

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-\frac{b}{a};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{c}{a};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{b}{c-a}.$$

**Ответ.** $c$.

**884.** Указание. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}\\ \sin(\alpha+\beta)&=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

По условию задачи

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a}{b}\,.\quad(2)$$

Заменяя значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ в соотношениях (1) согласно равенству (2), находим то, что требовалось доказать.

**885.** Обозначим:

$$a=\operatorname{tg}\alpha,$$
$$b=\operatorname{tg}\beta,$$
$$c=\operatorname{tg}\gamma.$$

Тогда

$$\frac{a-b}{1+ab}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta).$$

Аналогично

$$\frac{b-c}{1+bc}=\operatorname{tg}(\beta-\gamma).$$

$$\frac{c-a}{1+ac}=\operatorname{tg}(\gamma-\alpha).$$

Итак, сумма трех заданных дробей эквивалентна сумме

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\beta-\gamma)+\operatorname{tg}(\gamma-\alpha).$$

Но сумма трех тангенсов, в том случае, когда сумма их аргументов равна нулю (что имеет место в данном случае), равна произведению этих же тангенсов. Что и требовалось доказать (см. № 948).

888. Имеем:

$$1 = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\,(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 4\alpha =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4\alpha - \frac{1}{4}\sin 6\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha.$$

Полученное равенство невозможно, так как

$$\left|\frac{1}{4}\sin 4\alpha - \frac{1}{4}\sin 6\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\{|\sin 4\alpha| + |\sin 6\alpha| + |\sin 2\alpha|\} \leqslant \frac{3}{4},$$

что и требовалось доказать.

889. Из неравенства $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ следует, что

$$\alpha > \sin\alpha,$$

поэтому

$$\alpha\sin\alpha > \sin^2\alpha.$$

Легко заметить, что

$$\cos\alpha > \cos^2\alpha.$$

Складывая почленно два последних неравенства, находим:

$$\cos\alpha + \alpha\sin\alpha > 1,$$

что и требовалось доказать.

890. $$\frac{1}{\cos^4\alpha} + \frac{1}{\sin^4\alpha} = \frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}{\cos^4\alpha\sin^4\alpha} =$$

$$= \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha\sin^4\alpha} = \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{\cos^4\alpha\sin^4\alpha} =$$

$$= \frac{8(1 + \cos^2 2\alpha)}{\sin^4 2\alpha} \geqslant \frac{8}{\sin^4 2\alpha} \geqslant 8,$$

что и требовалось доказать.

891. $$\left(\sin^2\frac{\pi}{16}\right)^2 + \left(\sin^2\frac{3\pi}{16}\right)^2 + \left(\sin^2\frac{5\pi}{16}\right)^2 + \left(\sin^2\frac{7\pi}{16}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(1 - \cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(1 - \cos\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \left(1 - \cos\frac{5\pi}{8}\right)^2 +\right.$$

$$+\left(1-\cos\frac{7\pi}{8}\right)^2\Big]=\frac{1}{4}\Big[4-2\Big(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+$$

$$+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\Big)+\Big(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+$$

$$+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}\Big)\Big]=$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\Big(4-2\Big(2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{8}+2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{8}\Big)+$$

$$+\frac{1}{2}\Big(4+\underline{\cos\frac{\pi}{4}}+\underline{\underline{\cos\frac{3\pi}{4}}}+\underline{\underline{\cos\frac{5\pi}{4}}}+\underline{\cos\frac{7\pi}{4}}\Big)\Big]=$$

$$=\frac{1}{4}\Big[4-2\cdot0+\frac{1}{2}\Big(4+2\cos\pi\cos\frac{3\pi}{4}+2\cos\pi\cos\frac{\pi}{4}\Big)\Big]=$$

$$=\frac{1}{4}\Big[4+2+\cos\pi\Big(\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\Big)\Big]=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}.$$

**Ответ.** 1,5.

892. $\frac{3}{2}$.

893. 1.

894. $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\alpha}+\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cdot\cos\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha.$$

**Ответ.** $\cos^2\alpha$.

895. Имеем:

$$\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=$$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=$$

$$=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=-(\sin\alpha+\cos\alpha),$$

так как в третьем квадранте $\sin\alpha<0$ и $\cos\alpha<0$.

**896.** $\sin\alpha\sin\alpha+\cos\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\sin\alpha-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\alpha=$
$=\sin^2\alpha-1=-\cos^2\alpha.$

**Ответ.** $-\cos^2\alpha.$

**897.** $\dfrac{(-\sin\alpha)(-\operatorname{ctg}\alpha)\operatorname{tg}\alpha(-1)}{\cos\alpha(-1)}+\dfrac{(-\sin\alpha)\cdot 1}{(-\cos\alpha)}=$

$$=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\alpha.$$

**Ответ.** $2\operatorname{tg}\alpha.$

**898.** $\dfrac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha+2-\operatorname{ctg}^2\alpha+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=$

$$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha+2=3-\operatorname{tg}^2\alpha.$$

**Ответ.** $3-\operatorname{tg}^2\alpha.$

**899.** $\dfrac{(1+\cos 2\alpha)+(\cos 3\alpha+\cos\alpha)}{(1+\cos 2\alpha)+\cos\alpha-1}=$

$$=\frac{2\cos^2\alpha+2\cos 2\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}{\cos\alpha+\cos 2\alpha}=2\cos\alpha.$$

**Ответ.** $2\cos\alpha.$

**900.** $\operatorname{tg}^2\alpha+\sec^2\beta=\sec^2\alpha-1+1+\operatorname{tg}^2\beta=\operatorname{tg}^2\beta+\sec^2\alpha.$

**902.** $\dfrac{(1-\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha}{(1+\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha}=\dfrac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=$

$$=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha.$$

**903.** $1+\dfrac{2\cos 7\alpha\sin 7\alpha}{\sin 7\alpha}=\dfrac{\sin 7\alpha+\sin 14\alpha}{\sin 7\alpha}=$

$$=\frac{2\sin 10{,}5\alpha\cos 3{,}5\alpha}{2\sin 3{,}5\alpha\cos 3{,}5\alpha}=\frac{\sin 10{,}5\alpha}{\sin 3{,}5\alpha}.$$

**904.** $\dfrac{1-\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)}\times$

$$\times\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\sin\alpha(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{\cos\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)}\times$$

$$\times\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}=\sin\alpha.$$

905. $1-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}=\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$

$$=\frac{(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=-\frac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

906. $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{2\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=$

$$=\frac{1-\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

907. $\frac{3\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)+10\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sec^2\frac{\alpha}{2}}=3+10\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\times$

$$\times\cos^2\frac{\alpha}{2}=3+5\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=3+5\sin\alpha.$$

908. Указание. Заменить каждое слагаемое разностью соответствующих тангенсов.

909. $\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)+\frac{\cos\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}=$

$$=(1+\operatorname{tg}\alpha)\left(\sin\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\right)=(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot\frac{1}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha.$$

910. $\frac{\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=$

$$=\frac{\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha+\sin^2\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha+1)+1}{\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\sec^2\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha.$$

911. Известно, что $2\sin^2(45^\circ-\alpha)=1-\sin 2\alpha$,

поэтому

$$\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha+1}=\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha).$$

**912.** Раскрыв скобки, получим

$$\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\cos 2\alpha}-\operatorname{tg}2\alpha=\sec 2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha.$$

**913.** $\dfrac{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

**914.** $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha)}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha)}{\sin 2\alpha}.$$

**915.** $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{2}{\sin 2\alpha}=2\operatorname{cosec}2\alpha.$

**916.** $\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{\cos\alpha+\sin\alpha}=$

$$=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

**918.** $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sec^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sin\alpha.$

**919.** $\dfrac{2}{\sin 4\alpha}-\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\dfrac{2}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}-\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=$

$$=\frac{1-\cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{\sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$$

**920.** $\dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha}=\dfrac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin^2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha.$

**921.** $$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=1+\cos\alpha.$$

**922.** $$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}+\frac{1}{\cos 2\alpha}=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

**923.** $$\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}-\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}+2}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\frac{(\operatorname{tg}\alpha+1)^2-\operatorname{tg}^2\alpha-3}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{2(\operatorname{tg}\alpha-1)}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha+1}.$$

**924.** $$\frac{\cos 2\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos 2\alpha\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{1}{4}\sin 2\alpha.$$

**926.** $$\frac{\sin^2\alpha\left(1-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)}{\cos^2\alpha\left(1-\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)}=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}\cdot\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^6\alpha}{\cos^6\alpha}=\operatorname{tg}^6\alpha.$$

**927.** Указание. $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha\cos\alpha)$.

**928.** $$2[(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3]-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=$$
$$=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=$$
$$=-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)+1=$$
$$=1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=0.$$

**929.** $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} - \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \times$

$$\times\left[1 - \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\right] = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) \times$$

$$\times \frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

**930.** $8\cos^4\alpha = 2(2\cos^2\alpha)^2 = 2(1+\cos 2\alpha)^2 = 2 + 4\cos 2\alpha +$

$+ 2\cos^2 2\alpha = 2 + 4\cos 2\alpha + 1 + \cos 4\alpha = 3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$

**931.** Заменяя $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$, находим:

$$1 + \cos 2\alpha + \cos\alpha - 1 = \cos 2\alpha + \cos\alpha = 2\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

**932.** $\sin 2\alpha + \cos\alpha - \cos 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin 2\alpha\sin\alpha =$

$$= 2\sin\alpha(\cos\alpha + \sin 2\alpha) =$$

$$= 2\sin\alpha\left[\cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)\right] =$$

$$= 4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\alpha}{2}\right).$$

**933.** $3\left(\dfrac{1}{3} - \operatorname{tg}^2\alpha\right) = 3\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{tg}\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{tg}\alpha\right) =$

$$= 3(\operatorname{tg}30^\circ + \operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}30^\circ - \operatorname{tg}\alpha) =$$

$$= \frac{3\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)}{\cos^2 30^\circ\cos^2\alpha} = \frac{3\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)}{\frac{3}{4}\cos^2\alpha} =$$

$$= 4\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)\sec^2 a.$$

**934.** $\dfrac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} + \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{tg}2\alpha} = \dfrac{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2 2\alpha)\operatorname{tg}2\alpha} =$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

**935.** $\dfrac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} =$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta) - 2\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} =$$

$$= \frac{1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} =$$

$$= \frac{1 - \cos(\alpha - \beta)\,[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]}{\sin^2\alpha \sin^2\beta} =$$

$$= \frac{1 - \cos^2(\alpha - \beta)}{\sin^2\alpha \sin^2\beta} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2\alpha \sin^2\beta}.$$

**936.** Указание. Произведя сложение в левой части равенства, найдем:

числитель

$$\sin(\beta - \gamma) - \sin(\alpha - \gamma) - \sin(\beta - \alpha) =$$

$$= 2\sin\frac{\beta - \alpha}{2}\cos\frac{\beta + \alpha - 2\gamma}{2} - 2\sin\frac{\beta - \alpha}{2}\cos\frac{\beta - \alpha}{2} =$$

$$= 4\sin\frac{\beta - \alpha}{2}\sin\frac{\beta - \gamma}{2}\sin\frac{\gamma - \alpha}{2};$$

знаменатель

$$\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha - \gamma)\sin(\beta - \gamma) = 8\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \times$$

$$\times \cos\frac{\alpha - \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \gamma}{2}\cos\frac{\alpha - \gamma}{2}\sin\frac{\beta - \gamma}{2}\cos\frac{\beta - \gamma}{2}.$$

**937.** $(1 + \cos 2\alpha) + (\cos 4\alpha + \cos 6\alpha) = 2\cos^2\alpha + 2\cos 5\alpha \times$

$\times \cos\alpha = 2\cos\alpha(\cos\alpha + \cos 5\alpha) = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha.$

**938.** $(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha) - \sin 2(3\alpha) =$

$= 2\sin 3\alpha\cos\alpha - 2\sin 3\alpha\cos 3\alpha = 2\sin 3\alpha(\cos\alpha -$

$- \cos 3\alpha) = 2\sin 3\alpha \cdot 2\sin 2\alpha\sin\alpha = 4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha.$

**939.** $\dfrac{(\sin\alpha + \sin 5\alpha) + 2\sin 3\alpha}{(\sin 3\alpha + \sin 7\alpha) + 2\sin 5\alpha} =$

$$= \frac{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha + 2\sin 3\alpha}{2\sin 5\alpha\cos 2\alpha + 2\sin 5\alpha} = \frac{2\sin 3\alpha(\cos 2\alpha + 1)}{2\sin 5\alpha(\cos 2\alpha + 1)} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}.$$

**940.** $\cos^2\dfrac{\alpha + \beta}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha - \beta}{2} = \dfrac{1 + \cos(\alpha + \beta)}{2} -$

$$- \frac{1 - \cos(\alpha - \beta)}{2} = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] = \cos\alpha\cos\beta.$$

**941.** $$1+\frac{1}{\frac{\sin\alpha+1}{\sin\alpha}}=1+\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=$$

$$=\frac{2\left(\frac{1}{2}+\sin\alpha\right)}{1+\sin\alpha}=\frac{2(\sin 30^\circ+\sin\alpha)}{\sin 90^\circ+\sin\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

**942.** $$(\sin\alpha+\sin\beta)-[\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin\gamma]=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)=$$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

**943.** Докажем данное тождество путем приведения его к тождеству алгебраическому. Если обозначить $\operatorname{tg}\alpha=a$, то $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{a}$.

Имеем:

1) $$\frac{a^2}{1+a^2}\cdot\frac{1+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}}=\frac{a^2(a^2+1)}{1+a^2}=a^2;$$

2) $$\frac{1+a^4}{a^2+\frac{1}{a^2}}=\frac{a^2(1+a^4)}{a^4+1}=a^2.$$

Итак, правая часть выражения равна левой части, что и требовалось доказать.

**944.** Имеем:

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{1-\sin 2(\alpha+\beta)}{2}+\cos^2\beta=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha+\sin 2(\alpha+\beta)}{2}+\cos^2\beta=\cos(2\alpha+\beta)\cos\beta+\cos^2\beta=$$

$$=\cos\beta\,[\cos(2\alpha+\beta)+\cos\beta]=2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta).$$

**945.** Имеем:

$$\text{a) } \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\beta\cos\beta = (\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta) + (\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta) + 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\beta\cos\beta = \sin^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta\cdot\cos\alpha\sin\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 = \sin^2(\alpha+\beta).$$

$$\text{b) } \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = 1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = 1 - \cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] = 1 - \cos^2(\alpha+\beta) = \sin^2(\alpha+\beta).$$

**946.** Докажем данное тождество методом математической индукции. При $n = 2$ тождество очевидно:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - 2.$$

Кроме того,

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}[(n+1)\alpha - n\alpha] = \frac{\operatorname{tg}(n+1)\alpha - \operatorname{tg} n\alpha}{1 + \operatorname{tg}(n+1)\alpha\operatorname{tg} n\alpha},$$

откуда

$$\operatorname{tg} n\alpha\cdot\operatorname{tg}(n+1)\alpha = \frac{\operatorname{tg}(n+1)\alpha - \operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - 1.$$

Прибавляя к заданному соотношению это выражение, находим:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} 2\alpha + \ldots + \operatorname{tg}(n-1)\alpha\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} n\alpha\operatorname{tg}(n+1)\alpha = \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - n + \frac{\operatorname{tg}(n+1)\alpha - \operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - 1 = \frac{\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg}(n+1)\alpha - \operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - (n+1) = \frac{\operatorname{tg}(n+1)\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - (n+1),$$

что и требовалось доказать.

**947.** Имеем:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin[(\alpha+\beta)+\gamma]}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

**948.** а) Имеем: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\operatorname{tg}\gamma$,

или $$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=-\operatorname{tg}\gamma,$$

откуда $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$,
что и требовалось доказать.

**949.** Имеем:

$$\frac{\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha,$$

где $\sin\alpha-\cos\alpha\geqslant 0$.

**950.** Имеем:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Поэтому

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)=2\cos\frac{\gamma}{2}\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

**951.** $$\frac{\sin(2\alpha+2\beta)}{\cos 2\alpha\cos 2\beta}+\frac{\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma}=$$

$$=\frac{\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\gamma+\cos 2\alpha\cos 2\beta\sin 2\gamma}{\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma}=$$

$$=\frac{\sin 2\gamma(\cos 2\alpha\cos 2\beta-\cos 2\gamma)}{\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma}=$$

$$=\frac{\sin 2\gamma(\cos 2\alpha\cos 2\beta-\cos 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\alpha\sin 2\beta)}{\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma}=$$

$$=\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}2\beta\operatorname{tg}2\gamma,$$

где $\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(360^\circ-2\gamma)=-\sin 2\gamma$,

$$\cos 2\gamma=\cos(2\alpha+2\beta).$$

**953.** $$\frac{1-\cos\alpha}{2}+\frac{1-\cos\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}-1=$$

$$=\sin^2\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)=\sin^2\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$=\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

где $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

**962.** Воспользуемся условием задачи и производной пропорцией $\left(\text{если } \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}, \text{ то } \dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}\right)$, у которой все члены — положительные величины.

Имеем:

$$\frac{n+\cos\beta}{n+\cos\alpha}=\frac{-1-n\cos\beta}{1+n\cos\alpha}.$$

Если из найденной пропорции составить опять производную пропорцию, то после элементарных преобразований находим:

$$\frac{(1-n)(1-\cos\beta)}{(1+n)(1+\cos\alpha)}=\frac{(1+n)(1+\cos\beta)}{(1-n)(1-\cos\alpha)},$$

или

$$\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^2,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^2,$$

следовательно,

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{1+n}{1-n},$$

что и требовалось доказать.

## § 16. ПРИВЕДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ К ЛОГАРИФМИЧЕСКОМУ ВИДУ

**964.** $(\sin 61^\circ-\sin 59^\circ)-(\sin 93^\circ-\sin 87^\circ)=$

$=2\sin 1^\circ\cos 60^\circ-2\sin 3^\circ\cos 90^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 1^\circ=\sin 1^\circ.$

**Ответ.** $\sin 1^\circ$.

**965.** $(\sin 47^\circ+\sin 61^\circ)-(\sin 25^\circ+\sin 11^\circ)=$

$=2\cos 7^\circ\sin 54^\circ-2\cos 7^\circ\sin 18^\circ=$

$=2\cos 7^\circ(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)=4\cos 7^\circ\cos 36^\circ\sin 18^\circ=$

$=4\cos 7^\circ(1-2\sin^2 18^\circ)\sin 18^\circ=4\cos 7^\circ\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\cos 7^\circ,$

где $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $1-2\sin^2 18^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

**Ответ.** $\cos 7^\circ$.

**966.** $4\cos 10^\circ\cos 7^\circ 30'\sin 52^\circ 30'$.

**967.** $(\cos 11\alpha+\cos 5\alpha)+3(\cos 9\alpha+\cos 7\alpha)=$

$=2\cos 8\alpha\cos 3\alpha+6\cos 8\alpha\cos\alpha=2\cos 8\alpha(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)=$

$=2\cos 8\alpha(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha+3\cos\alpha)=8\cos 8\alpha\cos^3\alpha.$

**Ответ.** $8\cos 8\alpha\cos^3\alpha$.

**968.** $1+\cos\alpha-\sin\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=$

$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$

$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=$

$=4\cos\frac{\alpha}{2}\sin 45^\circ\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=$

$=2\sqrt{2}\cos\frac{a}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$

**969.** $\cos\alpha\,(\sin\alpha+\cos\alpha)=\begin{cases}\sqrt{2}\cos\alpha\cos(45^\circ-\alpha)\\ \sqrt{2}\cos\alpha\sin(45^\circ+\alpha).\end{cases}$

**970.** $(\sin\alpha+\sin\beta)+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+$

$$+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=$$

$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

**971.** Решение аналогично предыдущему.

**Ответ.** $4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{4}+30^\circ\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{4}-30^\circ\right)$.

**972.** $4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\sec^2 x$.

**973.** Имеем:

$$\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x}-\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}-8\cos 4x\operatorname{ctg}4x=$$

$$=\frac{\cos^4 2x-\sin^4 2x}{(\sin 2x\cos 2x)^2}-\frac{8\cos^2 4x}{\sin 4x}=$$

$$=\frac{4\cdot\cos 4x}{\sin^2 4x}-\frac{8\cos^2 4x}{\sin 4x}=4\operatorname{ctg}4x\cdot\frac{1-\sin 8x}{\sin 4x}=$$

$$=\frac{8\operatorname{ctg}4x\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-4x\right)}{\sin 4x}.$$

**Ответ.** $8\operatorname{ctg}4x\operatorname{cosec}4x\sin^2(45^\circ-4x)$.

**974.** Разделим почленно числитель и знаменатель дроби на 2; получим следующее выражение:

$$\frac{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}=\frac{\cos 60^\circ\cos\alpha+\sin 60^\circ\sin\alpha}{\cos 60^\circ\cos\alpha-\sin 60^\circ\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\cos(60^\circ-\alpha)}{\cos(60^\circ+\alpha)}.$$

975. $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha)}{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}=\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha).$

976. $\dfrac{\sec\alpha(1+\sin\alpha)}{\sec\alpha(1-\sin\alpha)}=\dfrac{2\cos^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\operatorname{ctg}^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right).$

977. $\dfrac{\frac{3}{5}+\cos\alpha}{\frac{3}{5}-\cos\alpha}=\dfrac{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2},$$

где $\beta=\arccos\dfrac{3}{5}$.

978. $2\sin 50^\circ\cos 10^\circ$.

979. $2+\dfrac{\operatorname{tg}^2 2\alpha+1}{\operatorname{tg}2\alpha}=2+\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha\sin 2\alpha}=$

$$=2\frac{(1+\sin 4a)}{\sin 4\alpha}=\frac{4\cos^2(45^\circ-2\alpha)}{\sin 4\alpha}.$$

980. $(\sin\alpha+\sin 3\alpha)+\sin 2\alpha=2\sin 2\alpha\cos\alpha+$

$+2\sin\alpha\cos\alpha=2\cos\alpha(\sin 2\alpha+\sin\alpha)=$

$$=2\cos\alpha\cdot 2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=4\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}.$$

981. Решение аналогично предыдущему.

**Ответ.** $\dfrac{\sin\dfrac{3\alpha}{2}\cos 2\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$

982. Указание. $\sin 2\alpha+2\sin 2\alpha\sin\alpha=$

$$=2\sin 2\alpha\left(\frac{1}{2}+\sin\alpha\right).$$

**Ответ.** $4\sin 2\alpha\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+15^\circ\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-15^\circ\right).$

983. $4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\gamma+\alpha}{2}.$

984. $4\sqrt{2}\cos(45^\circ - 2\alpha)\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$.

985. Воспользуемся формулой

$$\sin m\alpha \sin k\alpha = \frac{1}{2}[\cos(m-k)\alpha - \cos(m+k)\alpha].$$

Пусть $k = \frac{1}{2}$, а $m$ изменяется от 1 до $n$, т. е.

$$m = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n,$$

тогда:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2}, \\ 2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2}, \\ 2\sin 3\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{5\alpha}{2} - \cos\frac{7\alpha}{2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2\sin(n-1)\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{2n-3}{2}\alpha - \cos\frac{2n-1}{2}\alpha, \\ 2\sin n\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{2n-1}{2}\alpha - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha, \end{array}\right.$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin n\alpha) =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha,$$

откуда

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Зная, что

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha = 2\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha,$$

находим ответ:

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

**986.** Указание. Воспользоваться формулой

$$\sin k\alpha \cos m\alpha = \frac{1}{2}[\sin (m+k)\alpha - \sin (m-k)\alpha].$$

Принимая $k = \frac{1}{2}$, $m = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$,

по аналогии с предыдущим примером находим следующее выражение:

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\alpha - \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Заменяя

$$\sin \frac{2n+1}{2}\alpha - \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n+1}{2}\alpha,$$

находим ответ:

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

**987.** Имеем:

$$+\begin{cases} 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha \\ 2\cos^2 2\alpha = 1 + \cos 4\alpha \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2\cos^2 n\alpha = 1 + \cos 2n\alpha \end{cases}$$

$$2(\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cdots + \cos^2 n\alpha) = n + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cdots + \cos 2n\alpha),$$

откуда

$$\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha + \cdots + \cos^2 n\alpha = \frac{n}{2} + \frac{\sin n\alpha \cos (n+1)\alpha}{2 \sin \alpha}.$$

Указание. См. № 986.

**988.** Решение аналогично предыдущему. Воспользоваться формулой

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha.$$

**Ответ.** $\frac{n}{2} - \frac{\sin n\alpha \cos (n+1)\alpha}{2 \sin \alpha}$.

**989.** Имеем:

$$+\left\{\begin{array}{l} \sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)\right] \\ \sin\frac{\alpha}{2}\cos(\varphi+\alpha)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\varphi+\frac{3\alpha}{2}\right)-\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sin\frac{\alpha}{2}\cos(\varphi+n\alpha)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\varphi+\frac{2n+1}{2}\alpha\right)-\right. \\ \left.-\sin\left(\varphi+\frac{2n-1}{2}\alpha\right)\right]. \end{array}\right.$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(\varphi+k\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\varphi+\frac{2n+1}{2}\alpha\right)-\sin\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(\varphi+k\alpha)=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cos\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

**991.** Имеем:

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha),$$

т. е.

$$2\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha.$$

Составим равенства и сделаем преобразования, находим:

$$+\left\{\begin{array}{l|l} \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha & 1 \\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-2\operatorname{ctg}\alpha & \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^2}=2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^2}-2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2^2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \vdots \\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}-2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-2}} & \frac{1}{2^{n-1}} \end{array}\right.$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}=$$

$$= \frac{1}{2^{n-2}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2^{n-1}} - 2 \operatorname{ctg} 2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

**992.** Использовать формулу

$$\sin m\alpha \sin k\alpha = \frac{1}{2} [\cos (m - k)\alpha - \cos (m + k)\alpha].$$

Пусть $k = 1$, а $m$ изменяется от 1 до $2n - 1$, т. е.

$$n = 1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1;$$

тогда

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} (\cos 0 - \cos 2\alpha) \\ \sin 3\alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} (\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) \\ \sin 5\alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} (\cos 4\alpha - \cos 6\alpha) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sin (2n - 1)\alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} [\cos (2n - 2)\alpha - \cos 2n\alpha] \end{array} \right.$$

$$\sin \alpha [\sin \alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin (2n - 1)\alpha] =$$

$$= \frac{1}{2} [1 - \cos 2n\alpha] = (\sin n\alpha)^2.$$

Если разделить правую и левую части полученного равенства на $\sin^2 \alpha$, получим искомое равенство, что и требовалось доказать.

**993.** У к а з а н и е. Воспользоваться равенствами

$$\cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha};$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha};$$

$$\cos 4\alpha = \frac{\sin 8\alpha}{2 \sin 4\alpha};$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos 2^k \alpha = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2 \sin 2^k \alpha}.$$

## § 17. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

994. $\cos\left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \cos\left(-\arcsin\frac{1}{2}\right) =$

$$= \cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Ответ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

995. Обозначим $\arccos\frac{3}{5} = x$; тогда

$$\cos x = \frac{3}{5}; \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\sqrt{1-\frac{9}{25}}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25}.$$

**Ответ.** $\frac{24}{25}$.

996. $\frac{77}{85}$. 997. $\frac{12}{5}$. 999. $\frac{\pi}{2}$. 1000. 0.

1003. Обозначим $\operatorname{arctg}\frac{1}{5} = x$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{4} = y$; тогда

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}; \quad 0 < x < \frac{\pi}{6};$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{4}; \quad 0 < x < \frac{\pi}{6},$$

поэтому заданное соотношение принимает вид

$$2x + y = \operatorname{arctg}\frac{32}{43}. \qquad (1)$$

Но

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg}(2x+y) = \frac{32}{43},$$

следовательно, соотношение (1), а вместе с ним и исходное, справедливо, так как $0 \leqslant 2x + y < \frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

**1004.** Обозначим $\arccos a = x$; тогда $\cos x = a$ и так как $a \geqslant 0$, то $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Заданное соотношение принимает вид

$$2x = \arccos(2a^2 - 1). \qquad (1)$$

Но

$$\cos 2x = 2a^2 - 1;\ 0 < 2x \leqslant \pi$$

и равенство (1), а следовательно — и исходное, справедливо.

**1009.** $x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\left(8 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{10}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(8 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{10}\right)}$.

**1010.** $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\alpha + \operatorname{arctg}\beta) = \operatorname{tg}(\pi - \operatorname{arctg}\gamma) = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\gamma)$, т. е.

$$\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta} = -\gamma,$$

откуда

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta\gamma,$$

что и требовалось доказать.

## § 18. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

**1012.** Имеем:

$$3\sin x = 2(1 - \sin^2 x)$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0,$$

откуда

$$\sin x = \frac{1}{2},\quad x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6},$$

$$\sin x = -2.$$

**Ответ.** $x = k\pi + (-1)^k \dfrac{\pi}{6}$.

**1013.** $x = (2k + 1)\pi$.

**1014.** Имеем:

$$\sin x + (1 - \sin^2 x) = \frac{1}{4},$$

$$4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0,$$

откуда

$$\sin x = -\frac{1}{2},\quad x = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{6}$$

$$\left(\sin x = \frac{3}{2}\right).$$

**Ответ.** $x = k\pi - (-1)^k \dfrac{\pi}{6}$.

**1015.** Необходимым и достаточным условием равенства $\sin x = \sin y$ является выполнение одного из равенств:

$$x - y = 2k\pi, \quad x + y = (2k + 1)\pi.$$

Учитывая это, находим:

$$6x - 4x = 2k\pi,$$
$$6x + 4x = (2k + 1)\pi.$$

**Ответ.** $x = k\pi$, $x = (2k + 1)\frac{\pi}{10}$.

**1016.** Необходимым и достаточным условием равенства $\cos x = \cos y$ является выполнение одного из равенств:

$$x - y = 2k\pi, \quad x + y = 2k\pi.$$

Применяя данное положение к решению уравнения, находим:

$$3x - x = 2k\pi, \quad x = k\pi,$$

$$3x + x = 2k\pi, \quad x = k\frac{\pi}{2}.$$

**Ответ.** $x = k\frac{\pi}{2}$.

**1017.** Необходимым условием равенств $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$ и $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y$ является выполнение равенства $x - y = k\pi$.

Применяя это положение к решению данного уравнения, находим:

$$2x - x = k\pi.$$

**Ответ.** $x = k\pi$.

**1018.** Имеем: $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$,

откуда (см. № 1015)

$$3x + \frac{\pi}{2} - 2x = (2k + 1)\pi,$$

$$3x - \frac{\pi}{2} + 2x = 2k\pi.$$

**Ответ.** $x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$, $x = (4k + 1)\frac{\pi}{10}$.

**1019.** Решение аналогично предыдущему.

**Ответ.** $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $x = (4k + 1)\frac{\pi}{8}$.

**1020.** $x = (4k + 1)\frac{\pi}{10}$, $x = -(4k + 1)\frac{\pi}{2}$.

**1021.** Имеем: $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$,

откуда (см. № 1017)

$$x - \frac{\pi}{3} + x = k\pi$$

**Ответ.** $x = (3k + 1)\frac{\pi}{6}$.

**1022.** Имеем: $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$,

откуда (см. № 1017)

$$2x - \frac{\pi}{2} + 3x = k\pi.$$

**Ответ.** $x = (2k + 1)\frac{\pi}{10}$.

**1023.** Разлагая на множители, находим:

$$\sin x\,(5 - \sin^4 x) = 0;$$

так как $5 - \sin^4 x \neq 0$, то $\sin x = 0$, откуда $x = k\pi$.

**Ответ.** $x = k\pi$.

**1024.** Сделаем следующие преобразования:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = \sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right)\right] =$$

$$= \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) = \sin 3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= 3\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - 4\sin^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Подставляя это выражение в заданное уравнение, после упрощения находим:

$$\sin^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0,$$

т. е.

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = k\pi.$$

**Ответ.** $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

**1025.** Данное уравнение не имеет решений, если $\operatorname{tg} nx = 0$. Полагая $\operatorname{tg} nx \neq 0$, находим:

$$\operatorname{tg} mx = \operatorname{ctg} nx,$$

т. е.

$$\operatorname{tg} mx = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - nx\right),$$

откуда

$$mx - \frac{\pi}{2} + nx = k\pi.$$

**Ответ.** $x = \dfrac{2k+1}{m+n} \cdot \dfrac{\pi}{2}$.

**1026.** Группируя и умножая обе части равенства на $\frac{1}{2}$, находим:

$$\frac{1}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x,$$

$$\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin 7x + \cos\frac{\pi}{6}\sin 7x =$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos 5x + \cos\frac{\pi}{3}\sin 5x,$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right),$$

откуда

$$7x + \frac{\pi}{6} - 5x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi,$$

$$7x + \frac{\pi}{6} + 5x + \frac{\pi}{3} = (2k+1)\pi.$$

**Ответ.** $x = (12k+1)\dfrac{\pi}{12}$, $x = (4k+1)\dfrac{\pi}{24}$.

**1027.** После очевидного упрощения находим:

$$\cos 2x = \sin x,$$

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

откуда

$$2x + \frac{\pi}{2} - x = 2k\pi,$$

$$2x - \frac{\pi}{2} + x = 2k\pi.$$

**Ответ.** $x = (4k-1)\dfrac{\pi}{2}$, $x = (4k+1)\dfrac{\pi}{6}$.

**1028.** Имеем:

$$\sin(8x + 60^\circ) = -\sin 2x,$$

$$\sin(8x + 60^\circ) = \sin(-2x),$$

откуда

$$8x + 60^\circ - 2x = (2k + 1)\cdot 180^\circ,$$

$$8x + 60^\circ + 2x = 2k\cdot 180^\circ.$$

**Ответ.** $x = k\cdot 60^\circ + 20^\circ$, $x = k\cdot 36^\circ - 6^\circ$.

**1029.** Указание. Имеем:

$$4\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x - \frac{1}{4} = 0$$

или

$$16\sin^4 x - 12\sin^2 x + 1 = 0.$$

Решая это биквадратное уравнение, находим искомое.

**Ответ.** $x = k\pi \pm \arcsin\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$,

$$x = k\pi \pm \arcsin\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}.$$

**1030.** Имеем:

$$\sin 2x = \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x;$$

$$\sin 2x = 1 - \sin 2x,$$

$$2\sin 2x = 1,$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2},\quad 2x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}.$$

**Ответ.** $x = \dfrac{k\pi}{2} + (-1)^k\dfrac{\pi}{12}$.

**1031.** Имеем:

$$\sin^2 2x = 1 - \sin^2 x,$$

$$4\sin^2 x\cos^2 x - \cos^2 x = 0,$$

$$\cos^2 x\,(4\sin^2 x - 1) = 0,$$

$$\cos x = 0;\quad x = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\sin x = \pm\frac{1}{2};\quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

**Ответ.** $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$.

1032. Преобразуем данное уравнение так:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{1-\cos 6x}{2},$$

$$\cos 2x+\cos 4x=1+\cos 6x,$$

$$2\cos 3x\cos x=2\cos^2 3x,$$

$$\cos 3x\,(\cos x-\cos 3x)=0,$$

откуда

а) $\cos 3x=0,\quad x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6};$

б) $\cos x-\cos 3x=0,$

$$2\sin 2x\cdot\sin x=0$$

$$\sin x=0,\quad x=k\pi$$

$$\sin 2x=0,\quad x=\frac{k\pi}{2}.$$

**Ответ.** $x=(2k+1)\frac{\pi}{6},\quad x=k\cdot\frac{\pi}{2}.$

**1033.** Имеем:

$$\sin 3x+\sin x=\cos x,$$

$$2\sin 2x\cos x-\cos x=0,$$

$$\cos x\,(2\sin 2x-1)=0,$$

$$\cos x=0,\quad x=k\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$\sin 2x=\frac{1}{2},\quad 2x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}.$$

**Ответ.** $x=k\pi+\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{k\pi}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{12}.$

**1034.** Имеем: $\sin 3x-\sin x=\sin 2x.$
После элементарных преобразований получим:

$$\sin x\cdot\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}=0,$$

$$\sin x=0,\quad x=k\pi,$$

$$\sin\frac{3x}{2}=0,\quad x=\frac{2k\pi}{3},$$

$$\sin\frac{x}{2}=0,\quad x=2k\pi.$$

**Ответ.** $x=k\pi,\quad x=\frac{2k\pi}{3}.$

1035. $x = k\pi$, $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $x = (2k \pm 1)\pi$

**1036.** Заданное уравнение однородно относительно $\sin x$ и $\cos x$. При любом значении аргумента $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не могут быть равны нулю. Допустим, что $\cos x \neq 0$; тогда, разделив почленно данное равенство на $\cos x$, имеем:

$$\operatorname{tg} x = -1, \quad x = k\pi - \frac{\pi}{4}.$$

**Ответ.** $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$.

**1037.** Разлагая на множители, имеем:

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0,$$

откуда

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 1, \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

**Ответ.** $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

**1038.** Имеем:

$$\frac{1}{2}\sin 2x = 1 - \sin^2 x,$$

$$\sin x \cos x = \cos^2 x,$$

$$\sin x \cos x - \cos^2 x = 0,$$

$$\cos x (\sin x - \cos x) = 0,$$

откуда

$$\cos x = 0, \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\sin x - \cos x = 0, \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

**Ответ.** $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

**1039.** Имеем:

$$3 \sin x = 4 \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 4 \sin^2 \frac{x}{2} = 0,$$

$$\sin \frac{x}{2} \left(3 \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2}\right) = 0,$$

откуда

$$\sin\frac{x}{2}=0,\quad x=2k\pi,$$

$$3\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}=0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{3}{2},\quad x=2k\pi+2\operatorname{arctg}\frac{3}{2}.$$

**Ответ.** $x=2k\pi$, $x=2k\pi+2\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$.

**1040.** Разлагая правую часть уравнения на множители, находим:

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)=\frac{1}{2},$$

откуда

$$\cos^2 x-\sin^2 x=-\frac{1}{2},$$

$$\cos 2x=-\frac{1}{2},$$

$$2x=2k\pi\pm\frac{2}{3}\pi.$$

**Ответ.** $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

**1041.** Дополняя левую часть равенства до полного квадрата, получим:

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=\sin 2x+2\sin^2 x\cos^2 x,\ \sin^2 2x+2\sin 2x-2=0,$$

откуда

$$\sin 2x=-1+\sqrt{3},\ 2x=k\pi+(-1)^k\arcsin(\sqrt{3}-1),\ [\sin 2x=$$

$$=-(1+\sqrt{3})].$$

**Ответ.** $x=k\frac{\pi}{2}+(-1)^k\cdot\frac{\arcsin(\sqrt{3}-1)}{2}$.

**1042.** Воспользуемся тем, что $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=1$; находим:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)^2,$$

$$3\sin^4 x+3\cos^4 x-10\sin^2 x\cos^2 x=0,\ 3\operatorname{tg}^4 x-10\operatorname{tg}^2 x+3=0.$$

Решая это биквадратное уравнение, получим:

$$\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3}, \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

**Ответ.** $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$.

**1043.** Данное уравнение можно решать так же, как и предыдущее, или так:

$$\left(\sin^2 \frac{x}{3} + \cos^2 \frac{x}{3}\right)^2 - 2 \sin^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{5}{8},$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{5}{8}, \quad \sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{3}{4},$$

$$\sin \frac{2x}{3} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{2x}{3} = k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

**Ответ.** $x = (3k \pm 1) \frac{\pi}{2}$.

**1044.** У к а з а н и е. После элементарного преобразования находим:

$$\operatorname{tg}^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \pm 1; \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

**Ответ.** $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

**1045.** У к а з а н и е.

$$8 \sin^2 x + 6 \cos^2 x - 26 \sin x \cos x = 0,$$

$$4 \operatorname{tg}^2 x - 13 \operatorname{tg} x + 3 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = 3, \quad x = k\pi + \operatorname{arc\,tg} 3,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{4}, \quad x = k\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$$

(при найденных значениях аргумента $\cos x \neq 0$).

**Ответ.** $x = k\pi + \operatorname{arc\,tg} 3$, $x = k\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{4}$.

**1046.** Имеем:

$2\cos^2 x - 1 - 3\cos x = 2(1 + \cos x)$, $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$,

откуда

$$\cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3},$$

$$(\cos x = 3).$$

**Ответ.** $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

**1047.** Если перенести свободный член влево, полученное выражение весьма просто разлагается на множители:

$$4\sin^2 x(\sin x + 1) - 3(\sin x + 1) = 0,$$

$$(\sin x + 1)\left(\sin^2 x - \frac{3}{4}\right) = 0,$$

откуда $\sin x + 1 = 0$, $\sin x = -1$, $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$,

$$\sin^2 x - \frac{3}{4} = 0, \quad \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

**Ответ.** $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

**1048.** Преобразуем заданное уравнение так:

$\sin^2 x - 3\cos^2 x + 4\sin x\cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$.

После приведения подобных членов находим:

$$\sin x\cos x - \cos^2 x = 0,$$

$$\cos x(\sin x - \cos x) = 0,$$

$$\cos x = 0, \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\sin x - \cos x = 0; \quad \operatorname{tg} x = 1, \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

**Ответ.** $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

**1049.** Указание.

$$\sin x + \sin 3x + \sin 2x = 0,$$

$$2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 0,$$

$$\sin 2x\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

откуда

$$\sin 2x = 0, \quad 2x = k\pi,$$

$$\cos x + \frac{1}{2} = 0; \quad \cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}.$$

**Ответ.** $x = k\frac{\pi}{2}$, $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

**1050.** Имеем:

$$\sin x + \sin 3x + \sin 2x = 1 + \cos 2x + \cos x,$$
$$2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 2 \cos^2 x + \cos x,$$
$$\sin 2x (2 \cos x + 1) = \cos x (2 \cos x + 1),$$
$$2 \sin x \cos x (2 \cos x + 1) - \cos x (2 \cos x + 1) = 0,$$
$$\cos x (2 \cos x + 1)(2 \sin x - 1) = 0,$$

откуда

$$\cos x = 0, \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$2 \cos x + 1 = 0, \quad \cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad 2 \sin x - 1 = 0,$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}.$$

**Ответ.** $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$.

**1051.** Имеем:

$$(\sin x + \sin 3x) + (\sin 2x + \sin 4x) = 0,$$
$$2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 3x \cos x = 0,$$
$$\cos x (\sin 2x + \sin 3x) = 0,$$

т. е.

$$\cos x \sin \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,$$

откуда

$$\cos x = 0, \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\sin \frac{5x}{2} = 0, \quad \frac{5x}{2} = k\pi,$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0, \quad \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

**Ответ.** $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2k\pi}{5}$, $x = (2k + 1)\pi$.

**1052.** Имеем:

$$\sin^2 2x = \sin 3x + \sin x,$$
$$\sin^2 2x - 2 \sin 2x \cos x = 0,$$
$$\sin 2x (\sin 2x - 2 \cos x) = 0,$$
$$2 \cdot \sin 2x \cos x (\sin x - 1) = 0,$$

откуда

$$\sin 2x = 0, \quad x = \frac{k\pi}{2}.$$

$$\cos x = 0, \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

$$\sin x = 1, \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Легко заметить, что решения последних двух уравнений содержатся в решении первого уравнения.

**Ответ.** $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$.

**1053.** Имеем:

$$\frac{\sin^3 x (\sin x + \cos x)}{\sin x} + \frac{\cos^3 x (\sin x + \cos x)}{\cos x} = \cos 2x,$$

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$(\sin x + \cos x)(1 + \sin x - \cos x) = 0,$$

откуда

1) $\sin x + \cos x = 0$, $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$;

2) $\cos x - \sin x = 1$, $x = 2k\pi$; $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$.

Корни последнего уравнения не удовлетворяют заданному уравнению, так как при этих значениях аргумента или $\sin x$ или $\cos x$ обращаются в нуль.

**Ответ.** $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$.

**1054.** Р е ш е н и е 1-е. Пусть $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$; тогда

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1 + z^2}.$$

Если использовать эти соотношения, то заданное уравнение преобразуется к виду:

$$(b + c) z^2 - 2az - (b - c) = 0, \qquad (1)$$

откуда

$$z = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}.$$

1°. Если $a^2 + b^2 \geqslant c^2$ и $b + c \neq 0$, то квадратное уравнение (1) имеет вещественные корни, а общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$x = 2k\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}.$$

2°. Если $a^2 + b^2 < c^2$, то уравнение (1) имеет комплексные корни, а заданное уравнение решений не имеет.

3°. Если $b + c = 0$, то уравнение (1) линейное, $z = -\frac{b}{a}$.

Заданное уравнение (1) имеет решения вида:

$$x = 2k\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a},$$

$$x = (2k + 1)\pi.$$

Решение 2-е. Введение вспомогательного угла. Имеем:

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}.$$

Обозначая $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ ($\varphi$ можно найти по таблице), получим:

$$\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos x = \frac{c}{a},$$

$$\cos \varphi \cdot \sin x + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{a} \cdot \cos \varphi \ (\cos \varphi \neq 0),$$

т. е.

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi,$$

откуда

$$x + \varphi = k\pi + (-1)^k \arcsin \left( \frac{c}{a} \cos \varphi \right).$$

**Ответ.** $x = k\pi - \varphi + (-1)^k \arcsin \left( \frac{c}{a} \cos \varphi \right)$, если $\left| \frac{c}{a} \cos \varphi \right| \leqslant 1$.

**1055.** Сделаем следующие очевидные преобразования:

$$\frac{1}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{1}{2},$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{1}{2},$$

$$\cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2},$$

откуда

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

**Ответ.** $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi + \frac{2}{3}\pi$.

**1056.** Воспользуемся формулами (см. № 1054)

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

где

$$z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Заданное уравнение относительно новой переменной принимает вид:

$$z^2 - z = 0.$$

Решая это неполное квадратное уравнение, находим:

$$z_1 = 0 \text{ и } z_2 = 1,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0, \quad \frac{x}{2} = k\pi,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1, \quad \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

**Ответ.** $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

**1057.** Указание. См. решение задачи № 1054.

**Ответ.** $x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$, $x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$.

**1058.** $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x = 2k\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

**1059.** Преобразуем данное уравнение так:

$$\sin x - \frac{3}{8}\cos x = \frac{1}{2},$$

$$\sin x - \operatorname{tg}\varphi \cos x = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{8}\right),$$

$$\cos\varphi \sin x - \sin\varphi \cos x = \frac{1}{2}\cos\varphi,$$

$$\sin(x - \varphi) = \frac{1}{2}\cos\varphi,$$

откуда

$$x - \varphi = k\pi + (-1)^k \arcsin\left(\frac{\cos\varphi}{2}\right).$$

Зная значение тангенса, находим

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{73}}, \quad \varphi = \arccos\frac{8}{\sqrt{73}}.$$

**Ответ.** $x = k\pi + \arccos\frac{8}{\sqrt{73}} + (-1)^k \arcsin\frac{4}{\sqrt{73}}$.

**1060.** Если обозначить

$$\sin x + \cos x = z,$$

то заданное уравнение принимает вид

$$5z^2 - 12z + 7 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{7}{5}.$$

Следовательно,

$$\sin x + \cos x = 1$$

и

$$\sin x + \cos x = \frac{7}{5}$$

(см. № 1056 и № 1054).

**Ответ.** $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$,

$x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

**1061.** Обозначая

$$\sin x + \cos x = z,$$

находим

$$1 + \sin 2x = z^2,$$

откуда

$$\sin 2x = z^2 - 1.$$

С помощью этих подстановок приводим заданное уравнение к квадратному уравнению

$$z^2 + 2z - 3 = 0,$$

корни которого $z_1 = 1$, $z_2 = -3$.

Следовательно, $\sin x + \cos x = 1$ ($\sin x + \cos x = -3$) (см. № 1056 и № 1054).

**Ответ.** $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

**1062.** Имеем:

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x},$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos x \sin x - 1}{\sin x} = 0,$$

$$\cos x \sin x = 1 - \sin^2 x,$$

$$\cos x \sin x - \cos^2 x = 0,$$

$$\cos x (\sin x - \cos x) = 0,$$

откуда

$$\cos x = 0, \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2};$$

$$\sin x - \cos x = 0, \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Это и есть корни данного уравнения, так как знаменатель дроби этого уравнения $\sin x \neq 0$ при найденных значениях аргумента.

**Ответ.** $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

**1063.** $x = k\pi$, $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

**1064.** $x = k\pi$.

**1065.** Имеем:

$$\operatorname{tg} x + \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 2,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Значение $\operatorname{tg} x = 1$ не является корнем полученного уравнения; решая его, находим:

$$\operatorname{tg} x = 2 \pm \sqrt{3}, \quad x = k\pi + \operatorname{arctg} (2 \pm \sqrt{3}).$$

**Ответ.** $x = k\pi + \operatorname{arctg} (2 \pm \sqrt{3})$.

**1066.** Известно, что

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Подставляя значение $\sin 2x$ в заданное уравнение, после упрощения находим:

$$\operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Разлагая полученное выражение на множители, получим:

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = 1, \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

Последнее уравнение вещественных корней не имеет.

**Ответ.** $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

**1067.** Имеем:

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{3 \sin x}{\cos x} - \frac{5}{\sin x} = 0,$$

$$\frac{2\cos^2 x + 5\cos x - 3}{\sin x \cos x} = 0,$$

т. е.

$$2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0,$$

откуда

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\left(\cos x = -\frac{13}{4}\right)$$

Это и будет решением данного уравнения, так как при данных значениях аргумента $\cos x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$.

**Ответ.** $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

**1068.** Имеем:

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x},$$

$$\frac{\sin 3x (\cos 3x - \cos x \cos 2x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0.$$

Разлагая в числителе $\cos 3x = \cos(x + 2x)$, находим:

$$\frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 0,$$

откуда получим три простейших тригонометрических уравнения

$$\operatorname{tg} x = 0, \quad x = k\pi$$

$$\operatorname{tg} 2x = 0, \quad x = k \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg} 3x = 0, \quad x = k \cdot \frac{\pi}{3}.$$

При четном $k$ корни второго уравнения будут частным случаем корней первого уравнения (при нечетном $k$ они уравнению не удовлетворяют); но корни первого уравнения будут частным случаем корней третьего уравнения при $k$, кратном 3; следовательно, все корни заданного уравнения содержатся в формуле

$$x = k \cdot \frac{\pi}{3}.$$

**Ответ.** $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$.

**1069.** $x = (2x + 1)\pi, \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

**1070.** Указание. Воспользоваться формулой

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m - n)x - \cos(m + n)x].$$

**Ответ.** $x = \frac{k\pi}{3} \pm \arccos\frac{1}{3}$.

**1071.** Применяя формулу

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m - n)x + \cos(m + n)x]$$

к левой части уравнения, находим:

$$\frac{1}{2}[\cos x + \cos 3x] = \cos 3x,$$

$$\cos x - \cos 3x = 0,$$

$$\sin 2x \cdot \sin x = 0,$$

откуда

$$\sin 2x = 0, \quad x = \frac{k\pi}{2},$$

$$\sin x = 0, \quad x = k\pi.$$

Здесь все корни второго уравнения содержатся среди корней первого уравнения.

**Ответ.** $x = \frac{k\pi}{2}$.

**1072.** Имеем:

$$4 \sin^2 x \cos x = 2 \sin x \sin 2x = \cos x - \cos 3x.$$

Заданное уравнение принимает вид:

$$\cos x - \cos 3x = \cos x - \sin x, \quad \cos 3x = \sin x,$$

$$\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

откуда

$$3x \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2k\pi,$$

$$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2},$$

$$4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

**Ответ.** $x = k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}.$

**1073.** Правую часть уравнения преобразуем так:

$$\frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x.$$

Тогда заданное уравнение перепишем следующим образом:

$$2 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 2x \cos 2x,$$

$$\sin 2x \,(2 \sin x \sin 3x - \cos 2x) = 0.$$

Учитывая, что

$$2 \sin x \sin 3x = \cos 2x - \cos 4x,$$

находим

$$\sin 2x \cos 4x = 0,$$

откуда

$$\sin 2x = 0, \quad 2x = k\pi,$$

$$\cos 4x = 0, \quad 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

**Ответ.** $x = k\frac{\pi}{2}, \quad x = (2k + 1)\frac{\pi}{8}.$

**1074.** По условию, $a$, $b$, $m$ и $n$ — последовательные члены возрастающей арифметической прогрессии, поэтому

$$b = a + d,$$

$$m = a + 2d,$$

$$n = a + 3d,$$

где $d \geqslant 0$ — разность арифметической прогрессии. Заменяя $b$, $m$ и $n$ их значениями, по формуле п. 3, стр. 506, находим:

$$\sin ax \sin (a+d)x = \frac{1}{2}[\cos dx - \cos (2a+d)x],$$

$$\sin (a+2d)x \sin (a+3d)x = \frac{1}{2}[\cos dx - \cos (2a+5d)x].$$

Заданное уравнение перепишется так:

$$\cos (2a+d)x - \cos (2a+5d)x = 0,$$

$$\sin (2a+3d)x \sin 2dx = 0,$$

откуда

$$\sin (2a+3d)x = 0, \quad (2a+3d)x = k\pi,$$

$$\sin 2dx = 0, \quad 2dx = k\pi.$$

**Ответ.** $x = \dfrac{k}{b+m}\pi, \quad x = \dfrac{k}{2d}\pi,$

так как $2a+3d = b+m$.

**1075.** Обозначая $\sin x = a$, $\sin 2x = b$, $\sin 3x = c$, находим

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3.$$

Разлагая полученное выражение на множители (см. № 79), приходим к следующему результату:

$$3(a+b)(b+c)(a+c) = 0,$$

т. е.

$$(\sin x + \sin 2x)(\sin 2x + \sin 3x)(\sin x + \sin 3x) = 0. \qquad (1)$$

Известно, что

$$\sin x + \sin 2x = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$\sin 2x + \sin 3x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x.$$

Заменяя в выражении (1) суммы их произведениями, после очевидных преобразований находим:

$$\sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{5x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \sin 2x \cos x = 0,$$

откуда

$$\sin\frac{3x}{2}=0,\quad x_1=\frac{2k\pi}{3},$$

$$\sin\frac{5x}{2}=0,\quad x_2=\frac{2k\pi}{5},$$

$$\cos\frac{x}{2}=0,\quad x_3=(2k+1)\,\pi,$$

$$\sin 2x=0,\quad x_4=\frac{k\pi}{2},$$

$$\cos x=0,\quad x_5=k\pi+\frac{\pi}{2}.$$

Решения $x_3$ и $x_5$ входят в решение $x_4$.

**Ответ.** $x=\frac{2k}{3}\pi,\quad x=\frac{2k}{5}\pi,\quad x=\frac{k}{2}\pi.$

**1076.** Имеем:

$$(\sin^2 x)^5+(\cos^2 x)^5=\frac{29}{16}\cos^4 2x.$$

Заменяя

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},$$

понизим степень заданного уравнения:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5=\frac{29}{16}\cos^4 2x,$$

т. е.

$$(1-\cos 2x)^5+(1+\cos 2x)^5=58\cos^4 2x.$$

После преобразования получаем биквадратное уравнение:

$$24\cos^4 2x-10\cos^2 2x-1=0,$$

которое имеет два вещественных (и два комплексных) корня:

$$\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4},$$

$$\cos 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad 2x=2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}.$$

**Ответ.** $x=k\pi\pm\frac{\pi}{8},\quad x=k\pi\pm\frac{3}{8}\pi.$

**1077.** Имеем:

$$\sin(\pi\cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi\sin x\right),$$

отсюда (см. № 1015)

$$\pi\cos x + \frac{\pi}{2} - \pi\sin x = (2k+1)\pi,$$

$$\pi\cos x - \frac{\pi}{2} + \pi\sin x = 2k\pi.$$

После очевидных преобразований находим:

$$\text{а)}\ \cos x - \sin x = 2k + \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2k + \frac{1}{2},$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4k+1}{2\sqrt{2}};$$

$$\text{б)}\ \cos x + \sin x = 2k + \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2k + \frac{1}{2},$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4k+1}{2\sqrt{2}}.$$

Но

$$\left|\frac{4k+1}{2\sqrt{2}}\right| \leqslant 1 \text{ при } k = 0,$$

следовательно,

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

откуда

$$x = 2m\pi \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4},$$

$$x = 2m\pi \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

**Ответ.** $x = 2m\pi \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} \pm \frac{\pi}{4}.$

1078. Имеем:

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x\right), \tag{1}$$

отсюда (см. № 1017)

$$\pi \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2} + \pi \operatorname{ctg} x = k\pi, \tag{2}$$

т. е.

$$2 \operatorname{tg}^2 x - (2k+1) \operatorname{tg} x + 2 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = \frac{2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}}{4}. \tag{3}$$

Легко заметить, что уравнения (1) и (2) не эквивалентны. Так, например, если уравнению (2) удовлетворяют значения

$$\operatorname{tg} x = \frac{2k+1}{2}, \tag{4}$$

где $k$ — целое число, то эти значения не удовлетворяют уравнению (1), так как $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x)$ не имеет смысла; следовательно, наличие решений вида (4) в уравнении (2) подлежит исследованию.

По формуле (3) $\operatorname{tg} x$ существует, если $(2k+1)^2 - 16 \geqslant 0$, поэтому $k = 0 \pm 1, -2$ исключаются из рассмотрения. Кроме того, $\operatorname{tg} x$ будет рациональным числом вида (4) при условии, что подкоренное выражение равенства (3) будет точным квадратом.

Обозначая

$$2k+1 = y, \quad (2k+1)^2 - 16 = z^2$$

($z$ — целое число), находим:

$$y^2 - 16 = z^2,$$

т. е.

$$(y - z)(y + z) = 16. \tag{5}$$

Для решения последнего уравнения с двумя неизвестными в целых числах полагаем:

$$\begin{aligned} y - z &= u, \\ y + z &= v, \end{aligned} \tag{*}$$

и уравнение (5) принимает вид:

$$uv = 16. \tag{6}$$

Если $y$ и $z$ — целые числа, то $u$ и $v$ — также целые числа.

Уравнение (6) в целых числах имеет десять решений; для данной задачи пригодны следующие:

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= \pm 2, \quad v_{1,2} = \pm 8, \\ u_{3,4} &= \pm 8, \quad v_{3,4} = \pm 2. \end{aligned}$$

Решая систему (*), находим

$$y = \frac{u+v}{2}$$

(причем $y$ по условию — число нечетное), т. е.

$$y = \pm 5.$$

При $y = +5$ $k = 2$;
при $y = -5$ $k = -3$.
Из соотношения (3) при $k = 2$

$$\operatorname{tg} x = 2,\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{2};$$

при $k = -3$

$$\operatorname{tg} x = -2,\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}.$$

Но значения $\operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{2}$ не удовлетворяют исходному уравнению; ему удовлетворяют значения

$$\operatorname{tg} x = \pm 2. \tag{7}$$

Из соотношений (3) и (7) находим искомые решения уравнения.

**Ответ.** $x = m\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}}{4}$,

$$x = n\pi \pm \operatorname{arctg} 2,$$

где $m$ и $n$ — любые целые числа, $k = \pm 3, \pm 4, \pm 5, \ldots$

**1079.** Имеем (см. № 1016):

$$\pi x^2 \pm 2\pi x = 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

поэтому

$$x^2 \pm 2x - 2k = 0,$$

откуда

$$x = \mp 1 \mp \sqrt{2k+1}.$$

Корни этого уравнения должны быть вещественными числами; это возможно при условии, что подкоренное выражение $2k + 1 \geqslant 0$, т. е. $k \geqslant 0$.

Известно, что корень квадратный из полного квадрата нечетного числа $2k + 1$ есть число нечетное; значения $x$ в том случае будут целыми, когда целыми будут числа $\sqrt{2k+1}$; но эти числа нечетные, следовательно, целочисленные решения уравнения будут числа четные, что и требовалось доказать.

**1080.** Имеем:

$$\left| \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right| = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

т. е.

$$\left|\frac{2}{\sin 2x}\right| = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

1. Если

$$\sin 2x > 0,$$

то

$$\frac{2}{\sin 2x} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$2x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4}.$$

2. Если

$$\sin 2x < 0,$$

то

$$-\frac{2}{\sin 2x} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$2x = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{3}.$$

**Ответ.** $x = \frac{k\pi}{2} \pm (-1)^k \frac{\pi}{6}$.

**1081.** Известно (п. 10, стр. 505), что

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

Преобразуем заданное уравнение так:

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x + 2 \sin x \cos x - n \sin x = 0,$$

$$\sin x (3 - 4 \sin^2 x + 2 \cos x - n) = 0.$$

Если

$$\sin x = 0,$$

то

$$x = k\pi.$$

Если

$$3 - 4 \sin^2 x + 2 \cos x - n = 0,$$

т. е.

$$4 \cos^2 x + 2 \cos x - (n + 1) = 0,$$

то

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{4n + 5}}{4}.$$

Для того чтобы решения последнего уравнения имели место, необходимо:

$$\text{а) } 4n+5 \geqslant 0, \text{ т. е. } n \geqslant -\frac{5}{4};$$

$$\text{б) } \left|\frac{-1 \pm \sqrt{4n+5}}{4}\right| \leqslant 1.$$

Следовательно, если

$$\cos x = \frac{-1+\sqrt{4n+5}}{4},$$

то

$$-3 \leqslant \sqrt{4n+5} \leqslant 5, \text{ т. е. } n \leqslant 5.$$

Если

$$\cos x = \frac{-1-\sqrt{4n+5}}{4},$$

то

$$-4 \leqslant \sqrt{4n+5} \leqslant 3, \text{ т. е. } n \leqslant 1.$$

Учитывая все эти соотношения, находим решения заданного уравнения:

1. Если

$$1 \leqslant n \leqslant 5,$$

$$x = 2k\pi \pm \arccos\frac{-1+\sqrt{4n+5}}{4},$$

то

$$x = k\pi.$$

2. Если

$$-\frac{5}{4} \leqslant n \leqslant 1,$$

$$x = 2k\pi \pm \arccos x\,\frac{-1 \pm \sqrt{4n+5}}{4},$$

то

$$x = k\pi.$$

3. Если $n \geqslant 5$ или $n < -\frac{5}{4}$,

то

$$x = k\pi.$$

**1082.** Преобразуем уравнение так:

$$4^{2\sin x} = 4^{\frac{1}{\cos x}}.$$

Отсюда следует, что

1) $\cos x \neq 0$, так как правая часть уравнения при этом не имеет смысла;

2) $2\sin x = \dfrac{1}{\cos x}$.

Решая последнее уравнение, находим

$$\sin 2x = 1, \quad 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

**Ответ.** $x = k\pi + \dfrac{\pi}{4}$.

**1083.** Имеем:

$$(2\cos 3x + 4\cos x - 1)\lg\cos 2x = -\lg\cos 2x,$$

$$2(\cos 3x + 2\cos x)\lg\cos 2x = 0.$$

Если $\lg\cos 2x = 0$, то $\cos 2x = 1$,

$$2x = 2k\pi, \quad x = k\pi$$

Если

$$\cos 3x + 2\cos x = 0,$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 2\cos x = 0,$$

$$\cos x(4\cos^2 x - 1) = 0,$$

то

$$\cos x = 0, \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2};$$

$$4\cos^2 x - 1 = 0,$$

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}.$$

**Ответ.** $x = k\pi$, $x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$,

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}.$$

**1084.** Имеем:

$$\cos x = 1, \quad x = 2k\pi.$$

$$\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0;$$

$$\sin x = 1 \quad \left(x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}.$$

**Ответ.** $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$.

**1085.** Указание (см. № 1056).

$$\pi \lg x = 2k\pi, \quad x = 10^{2k};$$

$$\pi \lg x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad x = 10^{2k + \frac{1}{2}}.$$

**Ответ.** $x = 10^{2k}$, $x = 10^{2k + \frac{1}{2}}$.

**1086.** Воспользуемся соотношением

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

и приведем заданное уравнение к виду

$$\log_2 \sin x \cdot \log_3 \sin^2 x = 1.$$

Обозначая $\log_2 \sin x = z$, находим:

$$2^z = \sin x,$$

т. е. $2z^2 \log_3 2 = 1$, $z = \pm \sqrt{\frac{1}{2}\log_2 3}$,

или

$$\log_2 \sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}\log_2 3},$$

откуда

$$\sin x = 2^{-\sqrt{\frac{1}{2}\log_2 3}} \left(\sin x = 2^{\sqrt{\frac{1}{2}\log_2 3}}\right).$$

**Ответ.** $x = k\pi + (-1)^k \arcsin 2^{-\sqrt{\frac{1}{2}\log_2 3}}$.

**1087.** Имеем (см. № 1086):

$$\log_{\cos x} \sin x + \frac{1}{\log_{\cos x} \sin x} - 2 = 0,$$

$$(\log_{\cos x} \sin x)^2 - 2 \log_{\cos x} \sin x + 1 = 0,$$

$$(\log_{\cos x} \sin x - 1)^2 = 0, \ \log_{\cos x} \sin x = 1.$$

Потенцируя, находим:

$$\cos x = \sin x.$$

**Ответ.** $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$.

**1088.** Указание. Преобразовать заданное уравнение так

$$\operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 1) + (\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 1) = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x + 1)^2 + (\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0.$$

Так как нет таких значений $x$, при которых $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} x + 1$ или $\operatorname{tg} x - 1$ одновременно обратились бы в нуль, заданное уравнение решений не имеет.

**1089.** $x = 2$; $x = 4$.

**1090.** Указание.

$$\sin (2 \arcsin x) = \sin (\arcsin 2x),$$

$$2 \sin (\arcsin x) \cos (\arcsin x) = 2x.$$

$$x \sqrt{1 - x^2} = x.$$

**Ответ.** $x = 0$.

**1091.** Решение 1-е. Обозначая

$$\arccos x = a, \ \arcsin x = b,$$

имеем

$$\cos a = \sin b = x.$$

Заданное уравнение преобразуем к виду:

$$a - b = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$\cos (a - b) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

т. е.

$$x\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$4x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}.$$

Решая это иррациональное уравнение, находим корень искомого уравнения.

Решение 2-е. Имеем:

$$\arccos x-\arcsin x=\frac{\pi}{6},$$

$$\arccos x+\arcsin x=\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\arccos x=\frac{\pi}{3};\quad x=\frac{1}{2}.$$

**Ответ.** $x=\frac{1}{2}$.

**1092.** $x=\sqrt{3}-1$.

**1093.** $x=0$, $x=0{,}5$.

**1094.** $x=\pm\frac{1}{3}$.

**1096.** $x=0$; $x=\pm 1$.

**1097.** Указание

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)];$$

принимая во внимание условие задачи, находим:

$$\sin(x-y)=2m-\sin n.$$

**Ответ.** $x=\frac{n}{2}+\frac{k\pi}{2}+\frac{(-1)^k}{2}\arcsin(2m-\sin n)$,

$$y=\frac{n}{2}-\frac{k\pi}{2}-\frac{(-1)^k}{2}\arcsin(2m-\sin n),$$

если

$$|2m-\sin n|\leqslant 1.$$

**1098.** Преобразуем первое уравнение к виду

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=m$$

и, учитывая второе уравнение, находим:

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{m}{2\sin\frac{n}{2}};$$

следовательно,

$$x-y=4k\pi\pm 2\arccos\frac{m}{2\sin\frac{n}{2}},$$

$$x+y=n.$$

1. Если $\left|\frac{m}{2\sin\frac{n}{2}}\right|\leqslant 1$ и $\sin\frac{n}{2}\neq 0$, т. е. $n\neq 2k\pi$,

то заданная система уравнений имеет общее решение:

$$x=\frac{n}{2}\pm\arccos\frac{m}{2\sin\frac{n}{2}}+2k\pi,$$

$$y=\frac{n}{2}\mp\arccos\frac{m}{2\sin\frac{n}{2}}-2k\pi.$$

2. Если $\left|\frac{m}{2\sin\frac{n}{2}}\right|>1$ или $n=2k\pi$, то заданная система уравнений решений не имеет.

**1099.** Составляя производную пропорцию, находим:

$$\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{5}{1},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}=5;$$

учитывая второе уравнение, получим:

$$\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}=5.$$

Следовательно,

$$x-y=2k\pi+2\operatorname{arcctg}5$$

и

$$x+y=\frac{\pi}{2},$$

откуда и находим ответ.

**Ответ.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi+\operatorname{arcctg}5,$

$$y=\frac{\pi}{4}-k\pi-\operatorname{arcctg}5.$$

**1100.** Из первого уравнения находим:

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = m,$$

$$\cos x \cos y = \frac{\sin(x+y)}{m}.$$

Заменяя значение $x + y = n$, а

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos n + \cos(x-y)],$$

получим:

$$\cos n + \cos(x-y) = \frac{2\sin n}{m},$$

$$\cos(x-y) = \frac{2\sin n}{m} - \cos n,$$

откуда

$$x - y = 2k\pi \pm \arccos\left(\frac{2\sin n}{m} - \cos n\right).$$

Решая полученные уравнения со вторым уравнением системы, находим искомое.

**Ответ.** $x = k\pi + \frac{n}{2} \pm \arccos\left(\frac{2\sin n}{m} - \cos n\right)$,

$$y = -k\pi + \frac{n}{2} \mp \arccos\left(\frac{2\sin n}{m} - \cos n\right),$$

если $\left|\frac{2\sin n}{m} - \cos n\right| \leqslant 1$.

**1101.** Указание. Имеем:

$$y = n\pi - x;$$

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(n\pi - x) = -\operatorname{tg} x.$$

Первое уравнение принимает вид:

$$2\operatorname{tg} x = m, \quad \operatorname{tg} x = \frac{m}{2}.$$

**Ответ.** $x = k\pi + \operatorname{arctg}\frac{m}{2}$, $y = (n-k)\pi - \operatorname{arctg}\frac{m}{2}$.

**1102.** Указание. Составляя производную пропорцию, получим:

$$\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{m}{1},$$

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}=\frac{1+m}{1-m},$$

$$\cos(x-y)=\frac{1+m}{1-m}\cdot\cos n \text{ и т. д.}$$

**Ответ.** $x=\frac{n}{2}+k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1+m}{1-m}\cos n\right)$,

$$y=\frac{n}{2}-k\pi\mp\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1+m}{1-m}\cos n\right),$$

если $\left|\frac{1+m}{1-m}\cos n\right|\leqslant 1$, $m\neq 1$.

**1103.** Из первого уравнения находим:

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=1;$$

учитывая второе уравнение, имеем:

$$\sin(x+y)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда

$$x+y=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{4},$$

или $x+y=2n\pi+\frac{\pi}{4}$, при $k=2n$ (четном).

Из второго уравнения, заменяя $\cos x\sin y$ по известной формуле и учитывая последнее соотношение при различных четных значениях $k$, находим:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=\sqrt{2},$$

$$\cos(x-y)=\sqrt{2}-\cos\left[k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{4}\right]\ (k=0,\ 2,\ 4,\ \ldots),$$

$$\cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда

$$x-y=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

Решая системы уравнений

$$x+y=2n\pi+\frac{\pi}{4},$$

$$x-y=2n\pi\pm\frac{\pi}{4},$$

находим ответ.

При нечетных значениях $k$ исследовать самостоятельно.

**Ответ.** $x=2n\pi,\ y=\frac{\pi}{4};\ x=2n\pi+\frac{\pi}{4},\ y=0.$

**1104.** Указание.

$$\frac{\cos y}{1}=\frac{\cos x-n}{1-n\cos x},$$

$$\frac{1-\cos y}{1+\cos y}=\frac{(1+n)(1-\cos x)}{(1-n)(1+\cos x)},$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}=\frac{1+n}{1-n}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{x}{2},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+n}{1-n}}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{m}{2n}(n-1\pm\sqrt{1-n^2}),$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{m}{2n}(n+1\mp\sqrt{1-n^2}).$$

**Ответ.** $x=2\left[k\pi+\operatorname{arctg}\frac{m}{2n}(n-1\pm\sqrt{1-n^2})\right],$

$$y=2\left[k\pi+\operatorname{arctg}\frac{m}{2n}(n+1\mp\sqrt{1-n^2})\right],$$

если $n<1$.

**1105.** $\cos x=\pm\frac{\sqrt{29}\pm\sqrt{5}}{12},$

$$\cos y=\pm\frac{\sqrt{29}\mp\sqrt{5}}{12}.$$

## § 19. ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

**1106.** На рис. 55 рассмотрим четырехугольники $ODBM$, $ODCN$ и $OMAN$. У каждого из них суммы двух противоположных углов равны $2d$, следовательно, около каждого четырехугольника можно описать окружность.

Вычислим углы треугольника $DMN$:

$$\left.\begin{array}{l} \angle ODM = \angle OBM = 90^\circ - \alpha \\ + \angle ODN = \angle OCN = 90^\circ - \alpha \\ \angle ODM + \angle ODN = \angle MDN = \\ \quad = 180^\circ - 2\alpha, \end{array}\right\}$$

как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги,

т. е. $\angle MDN = 180^\circ - 2\alpha$.

Аналогично

$$\angle OMD = \angle OBD = 90^\circ - \gamma$$
$$\angle OMN = \angle OAN = 90^\circ - \gamma,$$

откуда

$$\angle DMN = 180^\circ - 2\gamma.$$

Точно так же находим:

$$\angle MND = 180^\circ - 2\beta.$$

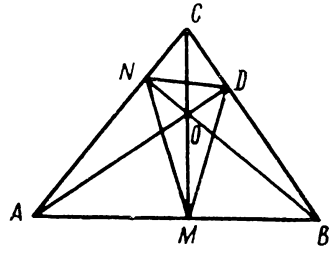



Рис. 55.

Для вычисления сторон треугольника $DMN$ воспользуемся тем, что $\triangle BMD \sim \triangle ABC$ (так как $\angle BMD = 90^\circ - \angle OMD = \gamma$; $\angle\beta$ — общий);
следовательно,

$$\frac{MD}{AC} = \frac{BD}{AB} = \cos\beta,$$

откуда

$$MD = AC\cos\beta = b\cos\beta.$$

Аналогично находим, что,

$$ND = c\cos\gamma,$$
$$MN = a\cos\alpha.$$

Искомая площадь треугольника $DMN$

$$S = \frac{1}{2} MN \cdot MD \sin(180^\circ - 2\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2} a\cos\alpha \cdot b\cos\beta \cdot \sin(180^\circ - 2\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2} ab\cos\alpha\cos\beta\sin 2\gamma.$$

**1107.** Решение 1-е. Обозначим площадь данного треугольника — $S$, площадь искомого — $S'$, углы заданного треугольника — $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$.

Имеем (см. № 1106):

$$S' = \frac{1}{2} ab \cos\alpha \cos\beta \sin 2\gamma =$$

$$= ab \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \sin\gamma = ab \sin\gamma \cdot (\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma),$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma,$$

откуда

$$S' = 2S \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.$$

Кроме того, по теореме косинусов находим:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \qquad (A)$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Следовательно,

$$S' = \frac{S}{4} \cdot \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{a^2 b^2 c^2}.$$

Решение 2-е. Имеем (см. рис. 55):

$$AM = b \cos\alpha, \quad BD = c \cos\beta, \quad CN = a \cos\gamma,$$

$$AN = c \cos\alpha, \quad BM = a \cos\beta, \quad CD = b \cos\gamma.$$

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} bc \cos^2\alpha \sin\alpha = S \cos^2\alpha,$$

$$S_{MBD} = \frac{1}{2} ac \cos^2\beta \sin\beta = S \cos^2\beta,$$

$$S_{NDC} = \frac{1}{2} ab \cos^2\gamma \sin\gamma = S \cos^2\gamma.$$

Площадь искомого треугольника

$$S' = S - (S_{AMN} + S_{NDC} + S_{MBD}) =$$

$$= S (1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma) =$$

$$= S (1 - 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma). \qquad (1)$$

Подставляя значения косинусов из формул (A) в соотношение (1), определим искомую площадь.

**1108.** $S = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

**1110.** Пусть $\alpha \neq 45°$ (см. рис. 34);

$$BD = 2ED = 2\sqrt{OD^2 - OE^2} = 2\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\alpha}.$$

Аналогично

$$AC = 2FC = 2\sqrt{R^2 - a^2\cos^2\alpha};$$

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$

**Ответ.** $S = 2\sqrt{(R^2 - a^2\cos^2\alpha)(R^2 - a^2\sin^2\alpha)}$.

**1111.** Обозначим хорды $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ (рис. 56). По условию

$$a : b : c = 1 : 2 : 1.$$

Построим высоты $OF$ и $OE$ и обозначим $\angle AOB = x$, $\angle BOC = \varphi$. Имеем:

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{a}{2R},$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{b}{2R},$$

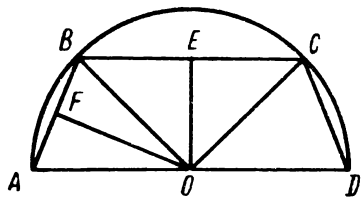



Рис. 56.

следовательно

$$\sin\frac{x}{2} : \sin\frac{\varphi}{2} = a : b = 1 : 2,$$

поэтому

$$\sin\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{x}{2}.$$

Замечая, что

$$\varphi = \pi - 2x,$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$

т. е.

$$\cos x = 2\sin\frac{x}{2},$$

$$2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} - 1 = 0,$$

откуда

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно,

$$\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}.$$

**Ответ.** $x = 2\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)$,

$$\varphi = 4\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

**1112.** Если стороны прямоугольного треугольника $a$, $b$ и $c$ составляют арифметическую прогрессию и $a < b < c$, то они удовлетворяют следующему соотношению:

$$b = \frac{a+c}{2}. \tag{1}$$

Но из прямоугольного треугольника $ABC$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} a &= c\cos\beta \\ b &= c\sin\beta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

поэтому равенство (1) принимает вид:

$$c\sin\beta = \frac{c(\cos\beta + 1)}{2},$$

или

$$2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \cos^2\frac{\beta}{2}.$$

Так как $\cos\frac{\beta}{2} \neq 0$, то, разделив данное равенство почленно на $2\cos^2\frac{\beta}{2}$, имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2},$$

следовательно,

$$\beta = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \text{ т. е. } \beta \approx 53°8'.$$

2. Если стороны прямоугольного треугольника составляют геометрическую прогрессию и $a < b < c$, то

$$b^2 = ac. \tag{3}$$

Заменяя в равенстве (3) значения $a$ и $b$ из соотношения (2), получим

$$c^2\sin^2\beta = c^2\cos\beta,$$

или
$$\cos^2\beta + \cos\beta - 1 = 0,$$
откуда
$$\cos\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$
следовательно,
$$\beta = \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \text{ т. е. } \beta \approx 38°10',3.$$

**1113.** Имеем (рис. 57):
$$OB = m;\ \angle BON = \angle BAD = \alpha.$$
Из треугольников $BON$ и $AOD$ находим:
$$r = m\cos\alpha,$$
$$AD = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$
поэтому
$$AC = 2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$
Следовательно,
$$AC = 2m\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

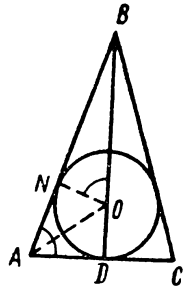


Рис. 57.

**1114.** Из условия вытекает, что все центральные углы равны 60°. Проекция радиуса $R$ на ближайший
$$r_1 = R\cos 60°.$$
Проекция $r_1$ на следующий ближайший
$$r_2 = r_1\cos 60° = R\cos^2 60°.$$
Следовательно,
$$r_3 = r_2\cos 60° = R\cos^3 60°$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_6 = R\cos^6 60° = R\left(\frac{1}{2}\right)^6.$$
**Ответ.** $r_6 = 2$ *см*.

**1115.** 6,5 мили.

**1116.** Пусть $AB = a_n$ — сторона правильного вписанного $n$-угольника (рис. 58),
$$\angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{180°}{n} = \varphi.$$
Из треугольника $AOC$
$$AC = r\sin\varphi,$$
поэтому
$$a_n = 2AC = 2r\sin\varphi.$$

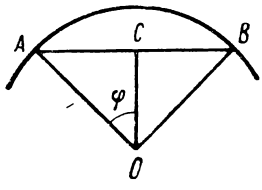


Рис. 58.

Апофема

$$OC = r\cos\varphi.$$

Периметр многоугольника

$$P_n = 2nr\sin\varphi.$$

Площадь многоугольника

$$S_n = \frac{1}{2}nr^2\sin 2\varphi.$$

**1117.** Обозначим искомую высоту предмета $AC = H$, а высоту угломерного инструмента $BB' = h$. Установив угломерный инструмент в точке $B$ (рис. 59) и измерив угол $\alpha$ и базис $BC = d$, из прямоугольного треугольника $AB'C'$ находим:

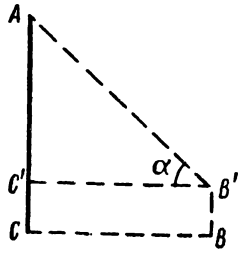


Рис. 59.

$$H = d\cdot\operatorname{tg}\alpha + h$$

($d = 20{,}5$ *м*; $\alpha = 36^\circ 20'$; $h = 1{,}37$ *м*).

**Ответ.** $H = 16{,}45$ *м*.

**1118.** Обозначим искомую высоту предмета, к которому подойти нельзя, через $H$, а высоту угломерного инструмента $h$.

На прямой $BC$ возьмем точку $D$ и измерим базис $DC = d$. Установив угломерный инструмент в точке $C$, а потом в точке $D$, измерим углы $\alpha$ и $\beta$ (рис. 60). Из треугольника $D'AC'$, по теореме синусов, находим:

$$AD' = \frac{d\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Из прямоугольного треугольника $B'AD'$ находим:

$$AB' = AD'\sin\beta = \frac{d\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Итак,

$$H = \frac{d\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} + h$$

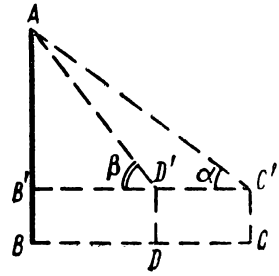


Рис. 60.

($DC = 11$ *м*; $\alpha = 35^\circ$; $\beta = 49^\circ$; $h = 1{,}37$ *м*).

**Ответ.** $H = 21{,}1$ *м*.

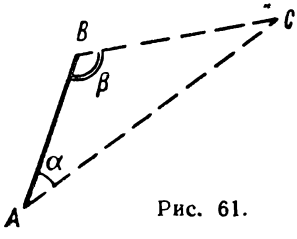


Рис. 61.

**1119.** На берегу реки (рис. 61) провешиваем прямую и измеряем отрезок $AB = d$ и углы $\alpha$ и $\beta$.

Из треугольника $ABC$, по теореме синусов, находим:

$$BC = \frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

($AB = 100$ *м*; $\alpha = 44^\circ$; $\beta = 74^\circ$; $AB = 16$ *м*; $\alpha = 22^\circ 57'$; $\beta = 143^\circ 8'$).

**Ответ.** $BC = 78{,}7$ и $BC = 39$ *м*.

**1120.** Пусть точки $A$ и $B$, расстояние между которыми требуется найти, видны, но недоступны.

Для решения задачи проводим базис $CD = d$ и строим фигуру (рис. 62); измеряем базис $d$ и углы $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$ и $\beta_2$.

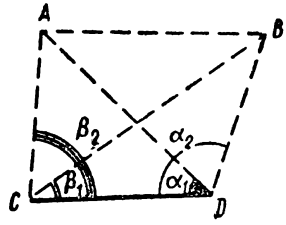


Рис. 62.

Из треугольника $BDC$

$$BC = \frac{\sin \alpha_2}{\sin (\beta_1 + \alpha_2)}.$$

Из треугольника $ACD$

$$AC = \frac{d \sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \beta_2)}.$$

Зная две стороны $AC$, $BC$ и $\angle ACB = \beta_2 - \beta_1$, находим искомое расстояние $AB$ ($d = 20$ *м*; $\alpha_2 = 81° 15'$; $\alpha_1 = 42° 1'$; $\beta_2 = 86° 40'$; $\beta_1 = 52° 40'$).

**Ответ.** $AB = 16{,}3$ *м*.

**1121.** а) На прямых $AC$ и $BC$, как на хордах, строим два сегмента, вмещающих данные углы $\alpha$ и $\beta$. Эти сегменты пересекутся, кроме точки $C$, в искомой точке $D$, что непосредственно вытекает из построения (рис. 63).

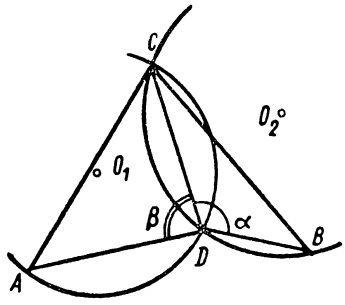


Рис. 63.

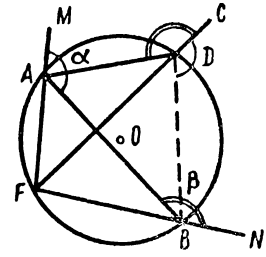


Рис. 64

Ясно, что решение невозможно, если искомая точка $D$ и три данные будут находиться на одной окружности, так как тогда оба сегмента сольются в один.

б) При точке $A$ (рис. 64) строим $\angle BAM = \alpha$, а при точке $B$ строим $\angle ABN = \beta$. Точку пересечения $F$ прямых $MA$ и $NB$ соединяем с третьей данной точкой $C$. При точке $A$ строим $\angle BAD = \angle BFC$. Точка пересечения $D$ прямых $AD$ и $FC$ и будет искомой.

Чтобы убедиться в правильности этого решения, достаточно через три точки $A$, $D$ и $B$ провести окружность, которая пройдет и через точку $F$, так как $\angle BAD = \angle BFC$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу $DB$).

$$\angle CDB = \angle MAB = \alpha,$$

$$\angle CDA = \angle NBA = \beta,$$

потому, что их дополнением до 180° являются вписанные углы, опирающиеся на одни и те же дуги $BF$ и $FA$.

в) Положение искомой точки $D$ (рис. 65) будет известно, если вычислим расстояния $DA$, $DB$ и $DC$. Для этого обозначим известный $\angle ABC = \gamma$ (зная три стороны треугольника $ABC$, мы можем его вычислить) и два неизвестных угла: $\angle BAD = x$; $\angle BCD = y$.

Сумма внутренних углов четырехугольника $ABCD$

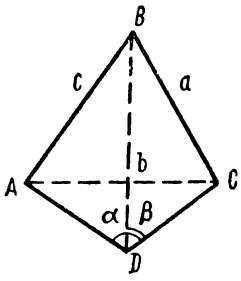


Рис. 65.

$$x + y + \alpha + \beta + \gamma = 360°,$$

откуда

$$\frac{x+y}{2} = 180° - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

Из треугольников $ABD$ и $BCD$, по теореме синусов, имеем:

$$BD = \frac{c \sin x}{\sin \alpha}; \quad BD = \frac{a \sin y}{\sin \beta},$$

или

$$\frac{c \sin x}{\sin \alpha} = \frac{a \sin y}{\sin \beta},$$

т. е.

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \sin \alpha}{c \sin \beta}.$$

Введем вспомогательный угол $\varphi$, обозначив

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \sin \alpha}{c \sin \beta}$$

(угол $\varphi$ можно вычислить с помощью логарифмов).

Следовательно,

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Применяя производную пропорцию, получим

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1},$$

или, после элементарных преобразований, находим:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}} = \operatorname{tg} (\varphi - 45°),$$

откуда $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg} (\varphi - 45°) \cdot \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}$.

Заменяя $\frac{x+y}{2}$ его значением, имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}(\varphi-45^\circ)\cdot\operatorname{tg}\left(180^\circ-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right), \qquad (A)$$

откуда вычисляем $\frac{x-y}{2}$.

Зная $\frac{x+y}{2}$ и $\frac{x-y}{2}$, находим углы $x$ и $y$.

Из треугольников $ABD$ и $BCD$ находим искомые расстояния

$$AD=\frac{c\sin(\alpha+x)}{\sin\alpha}, \qquad BD=\frac{c\sin x}{\sin\alpha},$$

$$CD=\frac{a\sin(\beta+y)}{\sin\beta},$$

и положение точки $D$ (за исключением одного случая, о котором сказано в примечании).

Примечания. 1. При решении данной задачи нужно помнить, что искомая точка может иметь шесть различных положений относительно трех заданных точек. Она может находиться: внутри треугольника $ABC$; вне этого треугольника, но внутри окружности, описанной около него; на окружности, проведенной через три заданные точки; вне этой окружности против одной из сторон треугольника $ABC$; вне окружности, но против одного из углов данного треугольника и, наконец, на сторонах данного треугольника.

2. В том частном случае, когда во второй части неравенства (A) один множитель обращается в нуль, а второй есть конечная величина, $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=0$, откуда $x=y$. Но если один множитель равен нулю, а второй стремится к бесконечности, то $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}$ принимает неопределенную форму вида $0\cdot\infty$, а задача имеет бесчисленное множество решений.

В самом деле, если

$$\operatorname{tg}\left(180^\circ-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\to\infty,$$

то

$$180^\circ-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=90^\circ,$$

или

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ;$$

отсюда и следует, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность и на дуге $ADC$ найти не одну определенную точку $D$, а бесчисленное множество точек, удовлетворяющих данному условию задачи.

Из равенства

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a\sin\alpha}{c\sin\beta}$$

вычислим вспомогательный угол $\varphi$. Для этого перепишем его так:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{\sin\beta}:\frac{c}{\sin\alpha}.$$

В данном случае

$$\frac{a}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\alpha}=2R,$$

где $R$ — радиус описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности.
Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi=1;\ \varphi=45^\circ,$$

поэтому первый множитель действительно обращается в нуль, т. е.

$$\operatorname{tg}(\varphi-45^\circ)=0.$$

3. Кроме приведенного, есть много других способов решения этой очень важной задачи.

**1122.** Указание. Применить формулы из решения задачи № 1121.

**Ответ.** $AD\approx 1{,}034$ *км*; $DC\approx 2{,}047$ *км*; $BD\approx 1{,}465$ *км*.

**1125.** $a=\dfrac{d\sqrt{2}}{4\sin\left(\frac{\alpha}{2}-45^\circ\right)}\approx 8{,}5.$

**1126.** $P=2a\sec^2\dfrac{\alpha}{2}.$

**1127.** Обозначим половину меньшей диагонали ромба через $k$, радиусы кругов, вписанных в ромб, согласно условию задачи, соответственно через $R$ и $r$.

Имеем: $R=k\sin\left(90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)=$

$$=2k\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)=$$

$$=2k\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right);$$

$$r=k\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)=k\operatorname{ctg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right).$$

**Ответ.** $\dfrac{R}{r}=2\sin^2\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{4}\right).$

**1128.** $d_{1,\,2}=\sqrt{a^2+b^2\pm 2ab\cos\alpha}\cdot\dfrac{2}{\sin\alpha};$

$$S=\frac{4ab}{\sin\alpha}.$$

**1129.** $R=105{,}15$ *кГ*.

**1130.** $d\approx 13{,}5$ *м*.

**1131.** $\alpha\approx 39^\circ\,59{,}5'$.

**1132.** По законам физики освещенность

$$I = \frac{k \sin \alpha}{l^2},$$

где $k$ — коэффициент пропорциональности (рис. 66). Из прямоугольного треугольника $AOB$

$$l = \frac{r}{\cos \alpha}, \quad I = \frac{k \sin \alpha \cos^2 \alpha}{r^2},$$

$$\left(\frac{Ir^2}{2k}\right)^2 = \frac{\sin^2 \alpha \cos^4 \alpha}{4} = (1 - \cos^2 \alpha) \frac{\cos^2 \alpha}{2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{2};$$

так как сумма трех множителей постоянна и равна единице, т. е.

$$(1 - \cos^2 \alpha) + \frac{\cos^2 \alpha}{2} + \frac{\cos^2 \alpha}{2} = 1,$$

то наилучшее (максимальное) освещение в точке $A$ будет при условии, если (см. № 703)

$$1 - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{2},$$

откуда

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Искомая высота

$$h = r \operatorname{tg} \alpha \approx 0{,}7r.$$

**Ответ.** $h \approx 0{,}7r$.

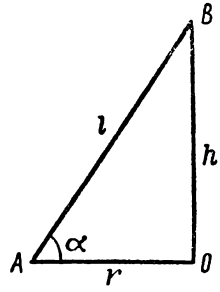



Рис. 66

**1133.** Обозначим радиус наибольшей вписанной окружности $r$, $\angle AOB = \alpha$.

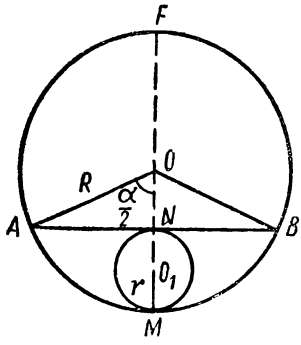



Рис. 67.

Имеем (рис. 67):

$$AN^2 = MN \cdot NF, \qquad (1)$$

где

$$AN = \pi r, \quad MN = 2r, \quad R = \frac{\pi r}{\sin \frac{\alpha}{2}};$$

$$NF = 2R - 2r = 2r\left(\frac{\pi}{\sin \frac{\alpha}{2}} - 1\right).$$

Заменяя $AN$, $MN$ и $NF$ их значениями в соотношении (1), находим:

$$\pi^2 r^2 = 4r^2 \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\alpha}{2}} - 1\right),$$

откуда

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{4\pi}{4+\pi^2},$$

поэтому

$$\alpha=2\arcsin\frac{4\pi}{4+\pi^2}.$$

**Ответ.** $\alpha\approx 129°56'$.

## § 20. ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

**1134.** Обозначим $AD=x$, $DC=y$, $DD_1=z$, $B_1D=d$ (рис. 68). Имеем:

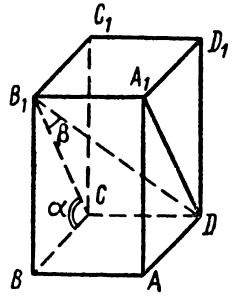


Рис. 68.

$$2(y+A_1D)=m; \quad (1)$$

$$y=d\sin\beta; \quad (2)$$

$$A_1D=d\cos\beta. \quad (3)$$

Из соотношений (1), (2) и (3) находим:

$$d=\frac{m}{2\sqrt{2}\cos(\beta-45°)}.$$

Кроме того:

$$x=A_1D\cos\alpha=d\cos\alpha\cos\beta,$$

$$z=A_1D\sin\alpha=d\sin\alpha\cos\beta.$$

По трем измерениям $x$, $y$ и $z$ находим объем параллелепипеда.

**Ответ.** $V=\dfrac{\sqrt{2}\,m^3\sin 2\alpha\sin 2\beta\cos\beta}{128\cos^3(\beta-45°)}$.

**1135.** Обозначим ребро куба $x$, отрезки $A_1N=y$, $AN=z$ (рис. 69). Находим: $xy=m$, $x=y\cos\alpha$, $z=y\sin\alpha$, откуда

$$y=\sqrt{\frac{m}{\cos\alpha}},$$

$$x=\sqrt{m\cos\alpha},$$

$$z=\sin\alpha\sqrt{\frac{m}{\cos\alpha}}.$$

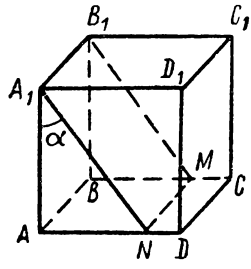


Рис. 69.

Плоскость сечения $A_1B_1MN$ делит куб на две части, из которых одна треугольная призма, а другая — четырехугольная.

Объем треугольной призмы

$$V_1=\frac{x^2z}{2}=\frac{1}{2}\sin\alpha\sqrt{m^3\cos\alpha}.$$

Объем четырехугольной призмы

$$V_2 = x^3 - V_1.$$

**Ответ.** $V_1 = \dfrac{\sin\alpha}{2}\sqrt{m^3\cos\alpha}$,

$$V_2 = \frac{2\cos\alpha - \sin\alpha}{2}\sqrt{m^3\cos\alpha}.$$

**1136.** Зная предыдущее решение, можно разделить $V_2$ на $V_1$. Но можно пойти другим путем. Так как высоты у полученных призм равны, то

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\text{пл. } B_1C_1CM}{\text{пл. } BB_1M} = \frac{(B_1C_1 + MC)\,C_1C}{B_1B \cdot BM} =$$

$$= \frac{[x + (x - z)]\,x}{xz} = 2\frac{x}{z} - 1.$$

**Ответ.** $\dfrac{V_2}{V_1} = 2\operatorname{ctg}\alpha - 1$, где $\dfrac{x}{z} = \operatorname{ctg}\alpha$.

**1137.** Из треугольника $BB_1D$ (рис. 70) находим диагональ основания

$$BD = H\operatorname{ctg}\alpha$$

и диагональ параллелепипеда

$$B_1D = \frac{H}{\sin\alpha}.$$

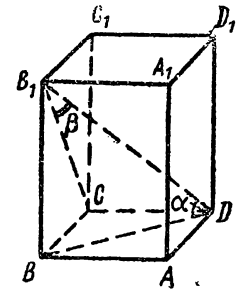


Рис. 70.

Из треугольника $DB_1C$ находим сторону основания $DC$, а из треугольника $BDC$ находим сторону основания $BC$:

$$DC = B_1D\sin\beta = \frac{H\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$BC = \sqrt{BD^2 - DC^2} = \frac{H}{\sin\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} =$$

$$= \frac{H\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)}}{\sin\alpha}.$$

Искомый объем параллелепипеда находим по известной формуле.

**Ответ.** $V = \dfrac{H^3\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)}}{\sin^2\alpha}$.

**1138.** $V = 2a^3\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\dfrac{3\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

**1139.** Обозначим искомые углы:

$$\varphi,\ 2\varphi,\ 4\varphi \text{ и } 2\varphi.$$

Через вершину пирамиды проведем два сечения $ESF$ и $MSN$ перпендикулярно площади основания, поэтому $SO = h$ будет высотой пирамиды (рис. 71).

Треугольник $ESF$ равнобедренный, поэтому высота $h$ в точке $O$ делит основание $EF$ пополам.

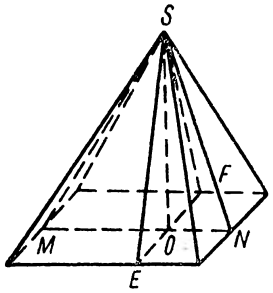



Рис. 71.

Имеем:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{OM}{h}, \tag{1}$$

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a}{2h}, \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg} 4\varphi = \frac{ON}{h}, \tag{3}$$

$$NO + OM = a. \tag{4}$$

Следовательно, из соотношений (1), (3) и (4) находим

$$\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{ctg} 4\varphi = \frac{OM + ON}{h} = \frac{a}{h}$$

и, учитывая соотношение (2), получаем:

$$\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{ctg} 4\varphi = 2\operatorname{ctg} 2\varphi,$$

или

$$\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg} 2\varphi = \operatorname{ctg} 2\varphi - \operatorname{ctg} 4\varphi,$$

т. е.

$$\frac{\sin(2\varphi - \varphi)}{\sin\varphi \sin 2\varphi} = \frac{\sin(4\varphi - 2\varphi)}{\sin 2\varphi \sin 4\varphi};$$

$$\sin 2\varphi = \sin 4\varphi = 2\sin 2\varphi \cos 2\varphi,$$

$$\cos 2\varphi = 0{,}5.$$

**Ответ.** $\varphi = 30°$.

**1140.** Обозначим сторону основания призмы — $a$, боковую сторону треугольника сечения — $x$; тогда $2x + a = 6a$, т. е.

$$x = \frac{5a}{2}.$$

Высота основания призмы

$$h = 0{,}5\sqrt{3}\cdot a.$$

Высота треугольника, полученного в сечении,

$$H = \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{6}.$$

Угол $\varphi$ между плоскостями основания и сечения находится из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{h}{H},$$

откуда

$$\varphi = \arccos\frac{h}{H}; \quad \varphi \approx 69^\circ\,17'\,43''.$$

Радиус круга, описанного около основания,

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Радиус круга, вписанного в сечение,

$$r = \frac{S_\triangle}{p} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Отношение радиусов этих кругов

$$\frac{r}{R} = \frac{a\sqrt{6}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

**Ответ.** $\dfrac{r}{R} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**1141.** Обозначим сторону основания треугольника $x$. Тогда высота основания треугольника $h = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, а его площадь $Q = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Рассматривая площадь основания треугольника $ABC$ как проекцию площади сечения $S$, имеем:

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = S\cdot\cos\beta,$$

откуда

$$x = 2\sqrt{\frac{S\cos\beta}{\sqrt{3}}}.$$

Высота призмы

$$H = h\operatorname{tg}\beta = \frac{x\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

Искомый объем призмы

$$V = QH = \frac{3x^3}{8}\operatorname{tg}\beta.$$

Полная поверхность призмы

$$S_{\text{полн}} = 3x\cdot H + 2Q.$$

**Ответ.** $V = \sin\beta \sqrt{\sqrt{3}\cdot S^3 \cos\beta}$,

$$S_{\text{полн}} = \frac{6S\cos\beta\sin(\varphi+\beta)}{\cos\varphi\cos\beta},$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

**1142.** Обозначая $AB = AC = x$, $BC = z$, имеем:

$$2x + z = 2p$$

и

$$z = 2x\sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$x = \frac{p}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{p}{2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}, \qquad z = \frac{p\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

Из треугольника $ABD$ находим высоту основания призмы:

$$h = x\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{p\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

Из треугольника $AA_1D$ находим высоту призмы:

$$H = h\operatorname{tg}\beta = \frac{p\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

Площадь основания призмы

$$Q = \frac{x^2\sin\alpha}{2} = \frac{p^2\sin\alpha}{8\cos^4\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

Искомый объем призмы находим по известной формуле.

**Ответ.** $V = \dfrac{p^3\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{16\cos^6\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}$.

**1143.** $S_{\text{полн}} = \dfrac{2p^2\sin(\beta+\varphi)\operatorname{tg}\varphi}{\cos\beta\cos\varphi\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$,

где $\varphi = \operatorname{arctg}\left[\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}\right]$.

**1144.** Диагональ основания пирамиды $BD = 2b\cos\alpha$. Высота сечения $OF = h$ есть средняя линия треугольника $ASC$ (рис. 72), поэтому

$$h = \frac{b}{2}.$$

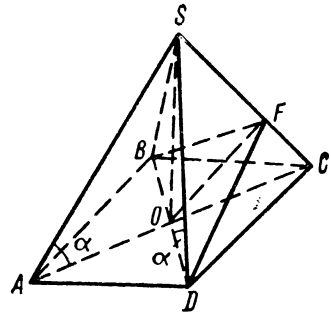


Рис. 72.

Искомая площадь сечения

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} BD \cdot h.$$

**Ответ.** $S_{\triangle} = \frac{1}{2} b^2 \cos\alpha.$

**1145.** $S_{\text{бок}} = \dfrac{a^2 \cos\left(22^\circ 30' + \frac{\alpha}{4}\right) \cos\left(22^\circ 30' - \frac{\alpha}{4}\right)}{2 \sin\frac{\alpha}{2}}.$

**1146.** Обозначим сторону основания пирамиды через $x$, апофему — $l$.

Тогда

$$S = x^2 + 2xl.$$

Но

$$l = \frac{x}{2\cos\alpha},$$

поэтому

$$S = \frac{2x^2 \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha},$$

откуда

$$x = \frac{\sqrt{S\cos\alpha}}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Высота пирамиды

$$H = \frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{S\cos\alpha}}{2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} x^2 H.$

**Ответ.** $V = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{6\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S^3\cos\alpha}{2}}.$

**1147.** Обозначим диагонали ромба $BD = d$ и $AC = d_1$, $SE = l$ (рис. 73).

Из прямоугольного треугольника $OCD$ имеем:

$$OC = \frac{d}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$d_1 = 2OC = d \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Площадь основания пирамиды

$$Q = \frac{1}{2} dd_1 = \frac{1}{2} d^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Вычислим сторону ромба и высоту боковой грани пирамиды.

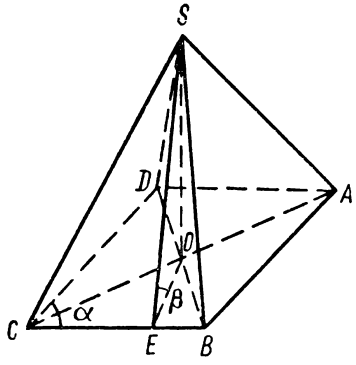


Рис. 73.

Из треугольника $OCD$

$$DC = \frac{d}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

из треугольника $EOC$

$$OE = OC \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, из треугольника $OSE$

$$l = \frac{OE}{\cos \beta} = \frac{d \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \beta}.$$

Искомая полная поверхность пирамиды

$$S_{\text{полн}} = \frac{4DC \cdot l}{2} + Q.$$

**Ответ.** $S_{\text{полн}} = \dfrac{d^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \beta}.$

**1148.** $S_{\text{бок}} = a^2 \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}, \quad V = \dfrac{a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{6 \sin \frac{\alpha}{2}}.$

**1149.** Площадь основания пирамиды (см. рис. 73)

$$Q = a^2 \sin \beta.$$

Высота основания пирамиды

$$h = a \sin \beta,$$

откуда

$$OE = \frac{h}{2} = \frac{a}{2} \sin \beta.$$

Высота пирамиды

$$H = OE \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha \sin\beta.$$

Высота боковой грани

$$l = \frac{OE}{\cos\alpha} = \frac{a\sin\beta}{2\cos\alpha}.$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3}QH = \frac{a^3}{6}\operatorname{tg}\alpha \sin^2\beta.$$

Полная поверхность пирамиды

$$S = \frac{4al}{2} + Q.$$

**Ответ.** $V = \frac{1}{6}a^3 \operatorname{tg}\alpha \sin^2\beta$. $S_{\text{полн}} = \dfrac{2a^2 \sin\beta \cos^3\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

**1150.** $S_{\text{бок}} = \dfrac{2a^2 \sin\beta \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$.

**1151.** Из рис. 74 ясно, что

$OC = h \operatorname{ctg}\beta$; $2OC = d_1 = 2h \operatorname{ctg}\beta$,

$OD = h \operatorname{ctg}\gamma$; $2OD = d_2 = 2h \operatorname{ctg}\gamma$.

Площадь основания пирамиды

$$Q = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha = 2h^2 \sin\alpha \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma.$$

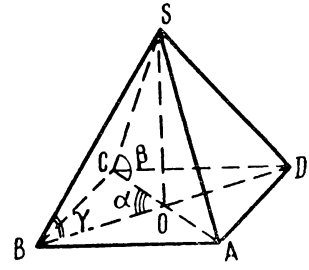



Рис. 74.

Искомый объем

$$V = \frac{2}{3}h^3 \sin\alpha \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma.$$

**Ответ.** $V = \frac{2}{3}h^3 \sin\alpha \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma$.

**1152.** Согласно условию задачи (см. рис. 72),

$$OA = a\cos\alpha,$$

$$d = 2OA = 2a\cos\alpha.$$

Высота пирамиды

$$H = a\sin\alpha.$$

Сторона основания квадрата

$$x = \frac{d\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\, a \cos\alpha.$$

Площадь основания пирамиды

$$Q = 2a^2 \cos^2\alpha.$$

Апофема

$$l = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{1+\sin^2\alpha}{2}}.$$

Боковую поверхность и объем пирамиды находим по известным формулам:

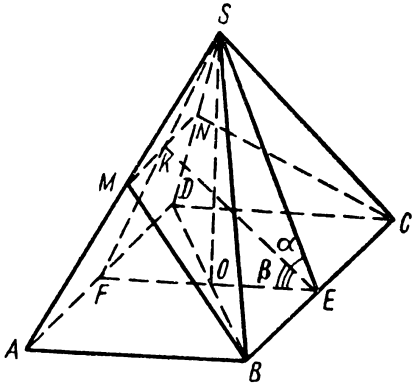



Рис. 75.

**Ответ.**

$$S_{\text{бок}} = 2a^2 \cos\alpha \sqrt{1+\sin^2\alpha},$$

$$V = \frac{1}{3} a^3 \sin 2\alpha \cos\alpha.$$

**1153.** Сечение — равнобочная трапеция. Из треугольника $OSE$ (рис. 75)

$$OE = a\cos\alpha,$$

следовательно, сторона основания пирамиды и бóльшая сторона основания трапеции $BMNC$

$$b = 2OE = 2a\cos\alpha.$$

Из треугольника $ESK$ по теореме синусов имеем:

$$\frac{KE}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{KS}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)},$$

откуда высота трапеции

$$KE = \frac{a\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

отрезок

$$KS = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Далее: $\triangle ASD \sim \triangle MSN$, поэтому

$$\frac{MN}{b} = \frac{KS}{a},$$

откуда меньшая сторона основания трапеции

$$MN = \frac{b \cdot KS}{a} = \frac{2a \cos\alpha \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Искомая площадь сечения

$$S = \left[a\cos\alpha + \frac{a\cos\alpha \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right] \frac{a \sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{a^2 \cos\alpha \sin 2\alpha \,[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]}{\sin^2(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{a^2 \cos\alpha \sin 2\alpha 2 \sin\alpha \cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

**Ответ.** $S = \dfrac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$.

**1154.** Из прямоугольного треугольника $AEF$ находим высоту равностороннего треугольника $ABC$ (рис. 76):

$$h = \frac{EF}{\sin\alpha} = \frac{k}{\sin\alpha}.$$

Сторона основания (равностороннего треугольника $ABC$) пирамиды

$$a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2k}{\sqrt{3}\sin\alpha}.$$

Площадь основания пирамиды

$$Q = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}k^2}{3\sin^2\alpha}.$$

Высота пирамиды

$$OS = OA \operatorname{tg}\alpha = \frac{2k}{3\cos\alpha},$$

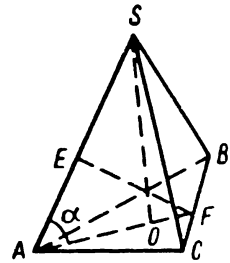


Рис. 76.

где $OA = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ — радиус описанной окружности треугольника $ABC$.

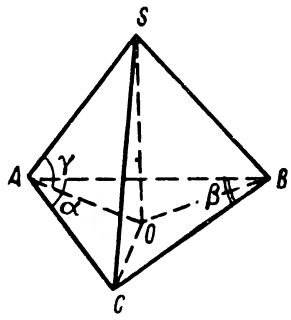


Рис. 77

**Ответ.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}k^3}{27\sin\alpha\sin 2\alpha}$.

**1155.** Из равенства прямоугольных треугольников $OAS$, $OBS$ и $OCS$ (рис. 77) следует, что $O$ — центр окружности, описанной около основания пирамиды:

$$OA = OB = OC = R,$$

где

$$R = h \operatorname{ctg}\gamma.$$

По теореме синусов из треугольника $ABC$ имеем:

$$AC = 2R \sin \beta,$$
$$BC = 2R \sin \alpha.$$

Площадь основания пирамиды

$$Q = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin (\alpha + \beta) = 2h^2 \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha + \beta) \operatorname{ctg}^2 \gamma.$$

Объем пирамиды находим по известной формуле.

**Ответ.** $V = \frac{2}{3} h^3 \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha + \beta) \operatorname{ctg}^2 \gamma.$

**1156.** $S_{\text{бок}} = \frac{\sqrt{3}\, b^2}{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}.$

**1157.** $V = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 2\gamma \operatorname{tg} \gamma \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha + \beta).$

**1158.** $V = \frac{1}{6} b^3 \sin 2\alpha \sin 2\beta \cos \beta.$

**1159.** Площадь основания пирамиды

$$Q = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha.$$

Из условия задачи следует, что высота пирамиды $H$ проходит через центр окружности радиуса $R$, описанной около основания. По теореме синусов, из треугольника $ABC$ имеем:

$$\frac{b}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = 2R,$$

откуда

$$R = \frac{b}{2 \cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$H = R \operatorname{ctg} \beta = \frac{b \operatorname{ctg} \beta}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

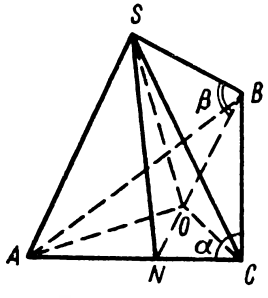


Рис. 78.

Объем пирамиды находим по известной формуле

**Ответ.** $V = \frac{1}{6} b^3 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \beta.$

**1160.** Длины ребер, как наклонные к плоскости основания под одним и тем же углом, равны, следовательно, равны и их проекции (рис. 78): $OA = OB = OC = R$, т. е. радиусу круга, описанного около треугольника $ABC$.

Из треугольника $ABC$ по теореме синусов находим:

$$R = \frac{b}{2 \sin \alpha}.$$

Искомая площадь треугольника $NSB$

$$S = \frac{1}{2} NB \cdot OS.$$

Из треугольника $OSB$ находим:

$$OS = R \operatorname{tg} \beta = \frac{b \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \alpha}.$$

Треугольник $AOB$ равнобедренный, поэтому

$$\angle ABO = \angle BAO = 90^\circ - \alpha,$$

$$\angle ANB = 180^\circ - (\angle NAB + \angle ABN) = 180^\circ - $$

$$- (180^\circ - 2\alpha) - (90^\circ - \alpha) = 3\alpha - 90^\circ.$$

$$\angle CNB = 180^\circ - (3\alpha - 90^\circ) = 270^\circ - 3\alpha.$$

По теореме синусов из треугольника $NBC$ имеем:

$$\frac{NB}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin (270^\circ - 3\alpha)},$$

или

$$NB = \frac{BC \sin \alpha}{-\cos 3\alpha} = -\frac{2b \sin \alpha \cos \alpha}{\cos 3\alpha},$$

где $BC = 2b \cos \alpha$.

**Ответ.** $S_\Delta = -\dfrac{b^2 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{2 \cos 3\alpha}$ $(\cos 3\alpha < 0)$.

**1161.** Из рис. 79 ясно, что искомый объем

$$V = \frac{1}{3} QH,$$

где $Q$ — площадь треугольника $abc$, $H$ — общая высота пирамид.

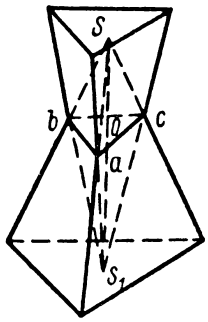


Рис. 79.

Обозначая радиус круга, описанного около треугольника $abc$, буквой $R$, получим

$$OS = R \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$OS_1 = R \operatorname{ctg} \beta,$$

$$H = OS + OS_1,$$

т. е.

$$H = \frac{R \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Кроме этого

$$H = l\cos\alpha,$$

следовательно $$l\cos\alpha = \frac{R\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

откуда $$R = \frac{l\sin 2\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

Площадь равностороннего треугольника $abc$

$$Q = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Искомый объем

$$V = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\cdot H.$$

**Ответ.** $V = \dfrac{\sqrt{3}\,l^3\cos\alpha\sin^2 2\alpha\sin^2\beta}{16\sin^2(\alpha+\beta)}$.

**1162.** Имеем:

$$H = d\sin\alpha,$$

$$2\pi R = d\cos\alpha,$$

откуда

$$R = \frac{d\cos\alpha}{2\pi}.$$

Искомый объем цилиндра находим по известной формуле.

**Ответ.** $V = \dfrac{d^2\cos\alpha\sin 2\alpha}{8\pi}$.

**1163.** $V = \dfrac{\pi b^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{8\sin^2\frac{\beta}{2}}$.

**1164.** $\varphi = 2\pi\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

**1165.** Обозначая радиус основания, образующую и высоту конуса соответственно через $r$, $l$ и $h$, находим:

$$r = l\cos\alpha,$$

$$h = r\operatorname{tg}\alpha.$$

Полная поверхность конуса

$$S = \pi r^2\left(\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right),$$

откуда определяем площадь основания конуса, его радиус и высоту:

$$\pi r^2 = \frac{S\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$r = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S\cos\alpha}{2\pi}},$$

$$h = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S\cos\alpha}{2\pi}}.$$

Следовательно, искомый объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{S\cos\alpha}{6\cos^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S\cos\alpha}{2\pi}}.$$

**Ответ.** $V = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{3\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{S^3\cos\alpha}{2\pi}}$.

**1166.** У к а з а н и е. Длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса:

$$\frac{\pi l\alpha}{180} = 2\pi r.$$

Но образующая конуса

$$l = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

следовательно,

$$r = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\alpha}{360}.$$

Зная $l$ и $r$, найдем высоту конуса:

$$h = \sqrt{l^2 - r^2},$$

а следовательно, и его объем по известной формуле.

**1167.** Проведем диаметр $AB \perp CD$ — линии пересечения плоскости $Q$ с плоскостью основания конуса. По условию

$$\angle AKS = \beta,$$

$$\angle CSD = \alpha.$$

Обозначая высоту конуса через $H$, имеем:

$$H = SK \cdot \sin\beta.$$

Кроме того,

$$Q = SK \cdot CK = (SK)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

где из треугольника $CKS$

$$CK = SK \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда

$$SK = \sqrt{Q \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}.$$

**Ответ.** $H = \sqrt{Q \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \beta$.

**1168.** Осевое сечение усеченного конуса — равносторонняя трапеция $ABCD$. Из точки $B$ на линию $AD$ опускаем высоту $BE = H$. Тогда:

$$H = (R - r) \operatorname{tg} \alpha,$$

$$l = AB = \frac{R - r}{\cos \alpha}.$$

Боковая поверхность усеченного конуса

$$S = \frac{\pi (R^2 - r^2)}{\cos \alpha}.$$

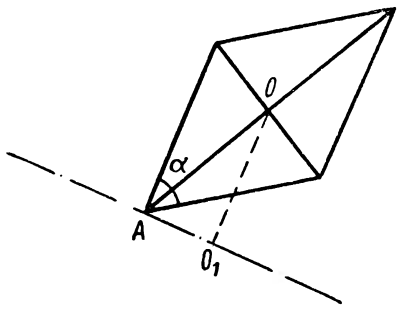



Рис. 80

Объем усеченного конуса

$$V = \frac{\pi}{3} (R^3 - r^3) \operatorname{tg} \alpha.$$

**1169.** $V = \frac{7}{6} \pi l^3 \sin 2\alpha \cos \alpha$.

**1170.** Решение 1-е. Искомая поверхность тела вращения состоит из боковой поверхности усеченного конуса (радиусы: $r = a$, $R = a + x$; образующая $l = a$), кольца, площадь которого равна $\pi (R^2 - x^2)$, площади круга $\pi r^2$ и боковой поверхности конуса $\pi x a$ (где $x = a \cos \alpha$, $R = 2a \cos^2 \frac{\alpha}{2}$); $S = \pi (R + r) a + \pi (R^2 - x^2) + \pi r^2 + \pi a x = \pi (2a + x) a + \pi [(a + x)^2 - x^2] + \pi a^2 + \pi a x = 4\pi a (a + x) = 4\pi a^2 (1 + \cos \alpha)$.

$$S = 8\pi a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Решение 2-е. Центр тяжести ромба находится в точке пересечения его диагоналей. Длина пути, описываемая центром тяжести ромба $O$ вокруг оси вращения $AO_1$ (рис. 80), равна:

$$2\pi \cdot OO_1 = 2\pi AO \cos \frac{\alpha}{2} = 2\pi a \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

где $AO = a \cos \frac{\alpha}{2}$.

По первой теореме Гульдина (см. № 828) искомая поверхность тела вращения

$$S = 4a \cdot 2\pi a \cos^2 \frac{\alpha}{2} .$$

**Ответ.** $S = 8\pi a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ .

**1171.** У к а з а н и е. По второй теореме Гульдина (см. № 828) искомый объем тела вращения

$$V = a^2 \sin \alpha \cdot 2\pi a \cos \frac{\alpha}{2} = 2\pi a^3 \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} ,$$

где $a^2 \sin \alpha$ — площадь ромба.

Поверхность тела вращения (см. № 1170)

$$S = 8\pi a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} .$$

**Ответ.** $V = 6984{,}9$ *м*$^3$, $S = 2861{,}7$ *м*$^2$.

**1172.** У к а з а н и е. Решение аналогично предыдущему.

**Ответ.** $V = \dfrac{\pi d^3 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$ , $S = \dfrac{2\pi d^2 \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \dfrac{\alpha + \beta}{2}}$ .

**1173.** $V = \dfrac{2\pi d^3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)}$ .

$$S = \frac{4\pi d^2 \sin \alpha \sin \beta \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}}{\sin (\alpha + \beta) \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2}} .$$

**1174.** Центр тяжести параллелограмма $ABCD$ находится в точке пересечения его диагоналей $O$ (рис. 81). Длина пути, описываемая центром тяжести параллелограмма при вращении вокруг оси $AO_1$, равна

$$2\pi \cdot OO_1 = \frac{2\pi ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}} ,$$

так как

$$\text{пл. } \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{OO_1 \cdot BD}{2} = \frac{OO_1 \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}{2} ,$$

откуда

$$OO_1 = \frac{ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}} .$$

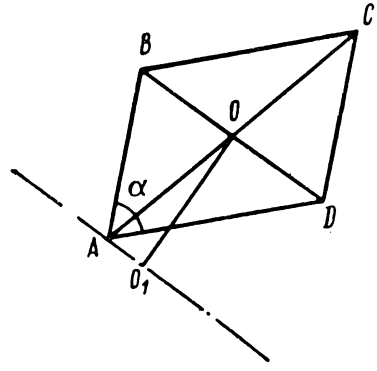



Рис. 81.

Поверхность тела вращения по первой теореме Гульдина (см. № 828)

$$S = 2\ a + b) \cdot \frac{2\pi ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}} = \frac{4\pi (a + b)\, ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}.$$

Объем тела вращения

$$V = ab \sin \alpha \cdot \frac{2\pi ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}} = \frac{2\pi a^2 b^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}},$$

где $ab \sin \alpha$ — площадь параллелограмма.

**Ответ.** $S = \dfrac{4\pi (a + b)\, ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}$,

$$V = \frac{2\pi a^2 b^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}.$$

**1175.** Искомый объем тела вращения равен сумме объемов трех тел: цилиндра и двух конусов, имеющих один и тот же радиус $r$, равный высоте трапеции; высота цилиндра равна $a$ — длине меньшей стороны трапеции; сумма высот двух конусов равна $(b - a)$ — разности оснований трапеции, т. е.

$$V_т = \pi r^2 a + \frac{\pi r^2}{3}(b - a) = \frac{\pi r^2}{3}(2a + b).$$

Обозначая высоту одного конуса через $x$, другого через $y$, находим

$$x = r \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$y = r \operatorname{ctg} \beta,$$

или

$$b - a = x + y = r (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta),$$

т. е.

$$b - a = r \frac{\sin (a + b)}{\sin \alpha \sin \beta},$$

откуда

$$r = \frac{(b - a) \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

**Ответ.** $V_т = \dfrac{\pi (2a + b)(b - a)^2 \sin^2 a \sin^2 \beta}{3 \sin^2 (\alpha + \beta)}$.

**1176.** $V_т = 6013{,}9\ м^3$.

**1177.** $V_т = \dfrac{2}{3} \pi b^3 \sin^2 2\alpha$.

**1178.** Обозначим радиус основания конуса через $R$, высоту через $H$ и образующую через $l$. Из треугольника $OBC$ имеем:

$$R = l \sin \frac{\alpha}{2}, \quad H = l \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Так как полная поверхность конуса известна

$$S_{\text{полн}} = \pi R (l + R) = \pi l^2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\pi l^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \left(45° - \frac{\alpha}{4}\right),$$

то

$$l = \frac{1}{\cos \left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)} \sqrt{\frac{S}{2\pi \sin \frac{\alpha}{2}}}.$$

Обозначая искомый радиус шара через $r$ и зная, что объемы шара и данного конуса равновелики, имеем:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

или

$$4r^3 = R^2 H = l^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$r = \frac{l}{2} \sqrt[3]{\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

**Ответ.** $r = \dfrac{1}{2 \cos \left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)} \sqrt[6]{\dfrac{S^3 \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}{4\pi^3}}.$

**1179.** Площадь треугольника $ABC$ (рис. 82)

$$Q = \frac{1}{2} AB \cdot CD. \qquad (1)$$

Из треугольника $ACD$

$$AD = \frac{AB}{2}, \quad CD = \frac{AD}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно, $Q = \dfrac{AD^2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$,

откуда $AD = \sqrt{Q \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$.

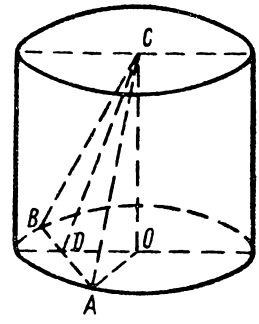



Рис. 82.

Из треугольников $AOD$ и $ACD$ находим:

$$AO = \frac{AD}{\sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{\sqrt{Q\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}{\sin\frac{180^\circ}{n}},$$

$$AC = \frac{AD}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{Q\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Из треугольника $AOC$

$$OC = \sqrt{AC^2 - AO^2},$$

т. е.

$$OC = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{180^\circ}{n}}\sqrt{Q\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{180^\circ}{n} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{180^\circ}{n}}\sqrt{Q\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

**Ответ.** $S_{\text{бок}} = \dfrac{2\pi Q}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{180^\circ}{n}} \times$

$$\times\sqrt{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$V = \frac{\pi Q}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin^3\frac{180^\circ}{n}} \times$$

$$\times\sqrt{Q\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

**1180.** Обозначим площадь основания пирамиды — $Q$, высоту — $H$, образующую конуса — $l$, основания конуса — $R$.

Имеем:

$$H = l\sin\alpha,\quad R = l\cos\alpha.$$

Из формулы $\pi R(l + R) = S$ вычислим $l$:

$$\pi l^2\cos\alpha(1+\cos\alpha) = S,$$

или

$$2\pi l^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} = S,$$

откуда

$$l = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S}{2\pi\cos\alpha}}.$$

Следовательно,

$$H = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S\cos\alpha}{2\pi}};$$

площадь основания пирамиды

$$Q = \frac{n}{2} R^2 \sin\frac{360^\circ}{n} = \frac{nS\cos\alpha\sin\frac{360^\circ}{n}}{4\pi\cos^2\frac{\alpha}{2}};$$

искомый объем пирамиды находим по известной формуле.

**Ответ.** $V = \dfrac{n\sin\alpha\sin\frac{360^\circ}{n}}{12\cos^3\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{S^3\cos\alpha}{2\pi^3}}.$

**1181.** $V = 6657{,}5.$

**1183.** $V = \dfrac{2l^3\sin^2\beta\operatorname{ctg}\alpha}{3\sin\alpha} \sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$

**1184.** Обозначим радиус вписанного шара через $R$, угол $ASO$ через $x$.

По условию задачи составим равенство:

$$\frac{1}{3}\pi NO_1^2 \cdot O_1S - \pi\cdot O_1E^2\left(R - \frac{O_1E}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (1)$$

Но

$$NO_1 = R\cos x, \qquad (2)$$

$$O_1S = NO_1\cdot\operatorname{ctg} x = \frac{R\cos^2 x}{\sin x}, \qquad (3)$$

$$O_1E = R - OO_1 = R(1 - \sin x). \qquad (4)$$

Заменяя в равенстве (1) $NO_1$, $O_1S$ и $O_1E$ их значениями из соотношений (2), (3) и (4), находим:

$$\frac{\cos^4 x}{\sin x} - (1-\sin x)^2(2+\sin x) = 4,$$

или

$$(1-\sin x)^2[(1+\sin x)^2 - (2+\sin x)\sin x] = 4\sin x,$$

т. е.

$$\sin^2 x - 6 \sin x + 1 = 0,$$

откуда

$$\sin x = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}172\ldots$$

**Ответ.** $x \approx 9° 55'$.

**1185.** Пусть $R$ — радиус основания конуса, $H$ — высота конуса, $h$ — высота треугольника (сечения); тогда:

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$h = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно, объем конуса

$$V = \frac{\pi a^3 \sqrt{\cos\alpha}}{12 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

**Ответ.** $V \approx 75$ *дм*$^3$.

**1186.** Зная объем шара $v$, легко найти его радиус $r$, так как из соотношения

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}.$$

Легко доказать, что высота конуса $OS = H$ проходит через центр вписанного шара. Соединив центр шара $O'$ с основанием образующей $AS$, получим прямоугольный треугольник $O'OA$, у которого катеты $OO' = r$, $OA = R$ и $\angle OAO' = \frac{\alpha}{2}$. Отсюда радиус основания конуса

$$R = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника $OSA$ находим высоту конуса:

$$H = R \operatorname{tg} \alpha.$$

Объем конуса

$$V = \frac{\pi}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

**Ответ.** $V = \frac{1}{4} v \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2}$.

**1187.** В треугольнике $ABS$, осевом сечении конуса (рис. 83), обозначим: $AS = l$ — образующая, $OB = R$ — радиус основания конуса, $O_1N = r$ — радиус вписанного шара; находим:

$$\pi R^2 = S,$$

откуда

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

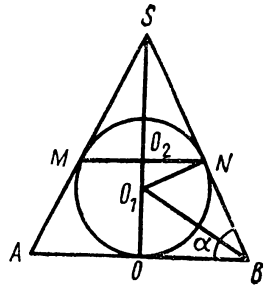


Рис. 83.

Из треугольника $BO_1O$

$$r = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Из треугольника $BOS$

$$l = \frac{R}{\cos \alpha}.$$

Образующая отсекаемого конуса

$$SN = l - R = \frac{2R \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

Высота этого конуса

$$SO_2 = SN \sin \alpha = 2R \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Радиус его основания

$$O_2N = SN \cos \alpha = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Искомый объем

$$V = \frac{8}{3} \pi R^3 \sin^6 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

**Ответ.** $V = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{S^3}{\pi}} \cdot \operatorname{tg} \alpha \sin^6 \frac{\alpha}{2}$.

**1190.** На рис. 46 изображено осевое сечение конуса и сечение шара с радиусом $r$. Обозначим $\angle ASB = 2\alpha$, высоту воды в конусе до удаления из него шара — $H$, а после удаления — $h$.

Имеем:

$$H = DS = r + OS = r + \frac{r}{\sin \alpha} = \frac{r(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{2r \cos^2 \left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \alpha}. \qquad (1)$$

Для определения высоты воды $h$ находим объем воды, налитой в конус,

$$V = V_к - V_ш = \frac{1}{3}\pi AD^2 \cdot H - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi (H^3 \operatorname{tg}^2\alpha - 4r^3), \quad (2)$$

где

$$AD = H \operatorname{tg}\alpha, \quad V_к = \frac{1}{3}\pi H^3 \operatorname{tg}^2\alpha. \quad (3)$$

Из соотношений (1) и (2) получим:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \left[\frac{2\cos^6\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\cos^2\alpha} - 1\right]. \quad (4)$$

Этот объем воды принимает форму конуса и после удаления шара, поэтому полученный конус будет подобен первоначальному. Но объемы подобных конусов относятся, как кубы их высот, следовательно,

$$V : V_к = h^3 : H^3,$$

откуда

$$h = \frac{H\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{V_к}}.$$

Подставляя значения $H$, $V_к$ и $V$ из соотношений (1), (3) и (4), находим:

**Ответ.** $H = \dfrac{2r\cos^2\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$;

$$h = r\sqrt[3]{\frac{4}{\operatorname{tg}^2\alpha}\left[\frac{2\cos^6\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\cos^2\alpha} - 1\right]}.$$

**1191.** Обозначим радиус описанного шара $O_2B = R$ (рис. 84). По условию задачи имеем:

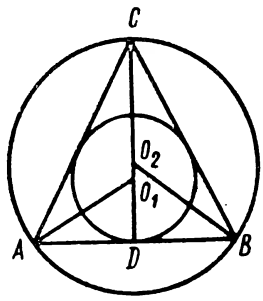


Рис. 84.

$$\pi R^2 = Q,$$

откуда

$$R = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}.$$

Из треугольника $ABC$ по теореме синусов находим радиус конуса:

$$\frac{AB}{\sin(360° - 2\alpha)} = 2R,$$

$$R_1 = \frac{AB}{2} = R\sin 2\alpha.$$

Из треугольника $O_1AD$ находим радиус вписанного шара:

$$r = R_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = R \sin 2\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Высота конуса

$$H = R_1 \operatorname{tg}\alpha = 2R \sin^2\alpha.$$

Объем вписанного шара

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}} \sin^3 2\alpha \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

Объем описанного шара

$$V_1 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

Объем конуса

$$V_2 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}} \sin^2 2\alpha \sin^2\alpha.$$

**1192.** Рассмотрим трапецию $ABCD$, осевое сечение усеченного конуса (рис. 85) и обозначим: $AD = a$, $BC = b$, $CD = l$, $CK = h$, $\angle CDK = \varphi$.

Боковая поверхность усеченного конуса

$$S_к = \pi\left(\frac{a+b}{2}\right)l.$$

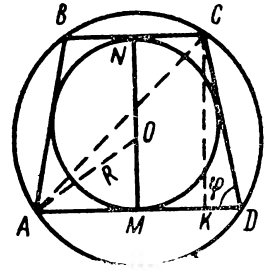


Рис. 85.

Учитывая свойство сторон описанного четырехугольника $ACBD$, имеем:

$$a + b = 2l, \quad \frac{a+b}{2} = l,$$

поэтому

$$S_к = \pi l^2.$$

Поверхность вписанного шара

$$S_ш = 4\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \pi h^2.$$

Согласно условию задачи

$$\frac{\pi l^2}{\pi h^2} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{l}{h} = \sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Из треугольника $KCD$

$$\frac{l}{h} = \operatorname{cosec}\varphi, \quad \operatorname{cosec}\varphi = \sqrt{\frac{m}{n}};$$

следовательно, искомый угол

$$\varphi = \operatorname{arccosec} \sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2} = l \cos\varphi \ (= KD), \\ \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} = l, \end{cases}$$

из которой находим:

$$a = l\,(1 + \cos\varphi) = 2l \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Радиус шара $R$, описанного около усеченного конуса, равен радиусу круга, описанного около трапеции $ABCD$, а следовательно, и около треугольника $ACD$; из этого треугольника по теореме синусов находим:

$$R = \frac{AC}{2 \sin\varphi}$$

и

$$AC^2 = a^2 + l^2 - 2al \cos\varphi = 4l^2 \cos^4 \frac{\varphi}{2} + l^2 -$$

$$- 4l^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cos\varphi = 4l^2 \cos^4 \frac{\varphi}{2} + l^2 - 4l^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \times$$

$$\times \left( \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = l^2 + 4l^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} =$$

$$= l^2\,(1 + \sin^2\varphi);$$

следовательно,

$$R = \frac{l\sqrt{1 + \sin^2\varphi}}{2 \sin\varphi}.$$

Но

$$r = \frac{h}{2} = \frac{l}{2} \sin\varphi.$$

Искомое отношение $\dfrac{R}{r} = \dfrac{\sqrt{1 + \sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}$.

**Ответ.** $\varphi = \operatorname{arccosec} \sqrt{\dfrac{m}{n}}$,

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{1 + \sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}.$$

**1193.** В треугольнике $ABC$, осевом сечении конуса (рис. 86), обозначим радиус вписанного шара $OD = r$, радиус основания конуса $DB = R$. По условию

$$\pi r^2 = Q,$$

откуда

$$r = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}.$$

Из треугольников $DOB$ и $DCB$ находим:

$$R = r \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) = \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right);$$

$$l = \frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Полная поверхность конуса

$$S_{\text{полн}} = \pi R\,(R + l) = \pi R^2 \left(\frac{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right).$$

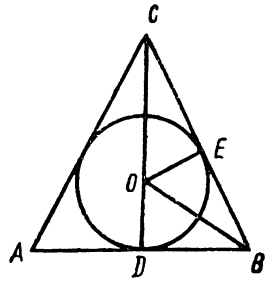


Рис. 86.

**Ответ.** $S_{\text{полн}} = 2Q \operatorname{ctg}^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) \cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$.

**1194.** Из треугольника $ABC$, осевого сечения конуса (см. рис. 86), обозначая $\angle B = \alpha$, находим:

$$R = r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$H = R \operatorname{tg}\alpha = r \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$l = \frac{R}{\cos\alpha} = \frac{r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha},$$

где $R$ — радиус основания конуса; $r$ — радиус шара; $l$ — образующая конуса; $H$ — высота конуса.

Полная поверхность конуса

$$S = \pi r^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1 + \cos\alpha}{\cos\alpha}\right).$$

Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

**Ответ.** $S_{\text{полн}} = \dfrac{2\pi r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

1195. По теореме синусов из треугольника $ABC$ (см. рис. 84) имеем:

$$AB = 2R \sin 2\alpha.$$

Радиус основания конуса

$$r = \frac{AB}{2} = R \sin 2\alpha.$$

Высота конуса

$$H = r \operatorname{tg} \alpha = 2R \sin^2 \alpha.$$

Объем конуса

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 2\alpha \sin^2 \alpha.$$

**Ответ.** $V = \dfrac{8}{3}\pi R^3 \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha.$

1196. Обозначим диагонали прямоугольника основания пирамиды $AC = BD = d$ и высоту пирамиды $OS = H$ (рис. 87). Легко доказать, что высота вписанной пирамиды проходит через точку $O$, лежащую на диаметре шара и на пересечении диагоналей прямоугольника, основания пирамиды, поэтому $SN = 2R$, $NO = 2R - H$. Используя свойство пересекающихся хорд, имеем:

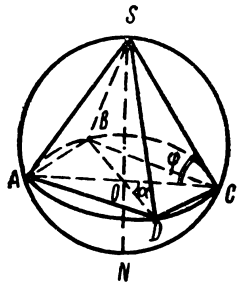



Рис. 87.

$$OC \cdot OA = OS \cdot NO,$$

или

$$\frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} = H(2R - H),$$

$$d^2 = 4H(2R - H). \qquad (1)$$

Из треугольника $COS$ находим:

$$d = 2H \operatorname{ctg} \varphi. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) как систему, находим:

$$H = 2R \sin^2 \varphi,$$

$$d = 4R \sin^2 \varphi \operatorname{ctg} \varphi = 2R \sin 2\varphi.$$

Площадь прямоугольника (основания пирамиды)

$$Q = \frac{1}{2} d^2 \sin\alpha = 2R^2 \sin^2 2\varphi \sin\alpha.$$

Искомый объем вписанной пирамиды находим по известной формуле.

**Ответ.** $V = \frac{4}{3} R^3 \sin^2 2\varphi \sin^2\varphi \sin\alpha.$

**1197.** На рис. 88 дано осевое сечение конуса, «заполненного» шарами. Обозначая радиусы шаров, расположенных снизу вверх, через $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, имеем:

$$OO_1 = r_1 + r_2,$$
$$On = r_1 - r_2.$$

Но

$$\frac{On}{OO_1} = \cos\alpha,$$

или

$$\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \cos\alpha,$$

откуда находим соотношение:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

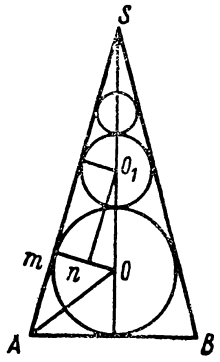


Рис. 88.

Кроме того,

$$r_1 = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

где $R$ — радиус основания конуса; поэтому

$$r_2 = r_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = R \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2},$$

. . . . . .

Объем первого шара

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}.$$

Объем второго шара

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}^9 \frac{\alpha}{2}.$$

Объем третьего шара

$$V_3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}^{15} \frac{\alpha}{2},$$

. . . . . .

Легко доказать, что объемы этих шаров образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен частному от деления последующего члена на предыдущий, т. е.

$$q = \operatorname{tg}^6 \frac{\alpha}{2}.$$

Предел суммы этой прогрессии, т. е.

$$\lim_{m \to \infty} S_m = S = \frac{V_1}{1 - q},$$

или

$$S = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^6 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot \frac{2 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^6 \frac{\alpha}{2}}.$$

**Ответ.** $S = \frac{2}{3} \pi R^3 \operatorname{tg} 2\theta$, где $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$.

**1198.** По условию шар вписан в призму, поэтому высота призмы равна диаметру шара. Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию и проходящей через центр шара, дает прямоугольный треугольник с вписанным кругом, радиус которого равен радиусу вписанного шара.

Определим его по формуле:

$$r = \frac{S}{p},$$

где $S$ — площадь треугольника $ABC$, $p$ — его полупериметр.

Имеем:

$$2p = AC + BC + AB; \quad AC = \frac{h}{\sin \alpha};$$

$$BC = \frac{h}{\cos \alpha}; \quad AB = \frac{h}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha},$$

следовательно,

$$p = \frac{h}{2} \frac{\cos \alpha + \sin \alpha + 1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{h}{2} \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha} =$$

$$= \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{h}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{h^2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{h^2}{\sin 2\alpha};$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{h\sqrt{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

**Ответ.** $V = S \cdot 2r = \dfrac{h^3\sqrt{2}}{2\sin 2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}.$

**1199.** Обозначая $l$ — апофему пирамиды, $H$ — ее высоту, $r$ — радиус вписанного шара, имеем:

$$l = \frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}; \qquad H = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

По условию четырехугольная пирамида правильная, поэтому центр вписанного шара лежит на ее высоте. Рассечем пирамиду плоскостью $MSN$ (рис. 89); тогда $\triangle OSN \sim \triangle O_1SK$,

откуда $\dfrac{SN}{ON} = \dfrac{O_1S}{OK}$, т. е. $\dfrac{l}{\frac{a}{2}} = \dfrac{H-r}{r}$,

следовательно,

$$r = \frac{aH}{2l + a} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sqrt{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

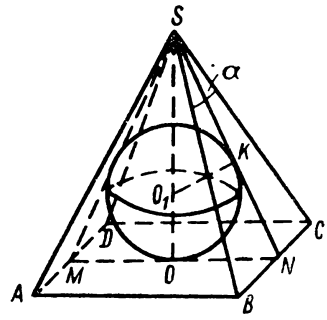


Рис. 89.

Искомая поверхность шара

$$S = \frac{\pi a^2\cos\alpha}{2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

**Ответ.** $S = 162{,}7$ *дм*$^2$.

**1200.** Обозначим искомый радиус шара $r$ и рассечем шар плоскостью, проходящей через его центр, параллельно основанию пирамиды. Получим большой круг шара, который спроектируем на плоскость основания пирамиды. Центр этого круга лежит на биссектрисе $\angle BAC$ (рис. 90), точно так же, как центр вписанного шара лежит на биссектрисе $\angle ADS$. Из треугольников $OO_1D$ и $AO_1N$ находим:

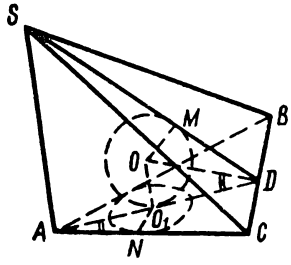


Рис. 90.

$$O_1D = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \qquad AO_1 = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Сумма этих двух отрезков равна высоте основания пирамиды:

$$AD = b\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$b\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

или

$$b\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2r\cos^2\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

откуда

$$r = \frac{b\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}.$$

**Ответ.** $r = b\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$.

**1201.** $R = \frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1+\cos^4\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\alpha}$.

**1202.** В сечении грани $DSC$ с шаром получим фигуру $MSNnM$ (рис. 91), ограниченную отрезками $MS$, $NS$ и дугой $MnN$. Вычислив учетверенную площадь этой фигуры, найдем ответ. Вначале вычислим радиус дуги $MnN$. Восставив перпендикуляр из середины высоты пирамиды $SK$ к боковой грани $DSC$, найдем точку $O_1$, которая и будет центром круга сечения шара боковой гранью.

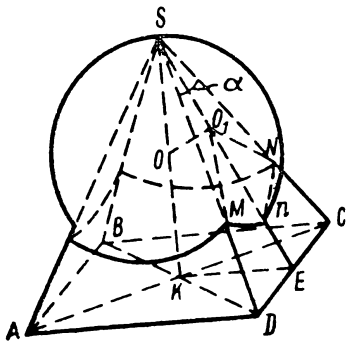



Рис. 91.

$$\triangle SKE \sim \triangle SOO_1,$$

следовательно, $\frac{O_1S}{OS} = \frac{SK}{ES}$,

или $O_1S = \frac{OS\cdot SK}{ES} = \frac{2OS\cdot SK}{2ES} = \frac{SK^2}{2ES}$.

Но $ES = b\cos\frac{\alpha}{2}$, $DE = KE = b\sin\frac{\alpha}{2}$,

$$SK^2 = SE^2 - KE^2 = b^2\cos\alpha.$$

Поэтому $r = O_1S = \frac{b\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Площадь сектора

$$MO'N = \frac{\pi r^2 2\alpha}{360} = r^2 \cdot \frac{\pi\alpha}{180}.$$

Площади двух равных равнобедренных треугольников $MO_1S$ и $NO_1S$ $Q = r^2 \sin(180° - \alpha) = r^2 \sin\alpha$, следовательно, площадь фигуры $MSNM$

$$S = r^2 \sin\alpha + r^2 \frac{\pi\alpha}{180} = \frac{b^2 \cos^2\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\alpha + \frac{\pi\alpha}{180}\right).$$

Искомая площадь поверхности $S_1 = 4S$.

**Ответ.** $S_1 = \dfrac{b^2\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\alpha + \dfrac{\alpha\pi}{180}\right)$.

**1203.** $S \approx 2{,}5\ м^2$; $\alpha = 70° 31' 43{,}6''$.

**1205.** $r = b\sqrt{2}\sin\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

**1206.** $V_ц : V_к = \dfrac{3}{4}\dfrac{m^2}{n^2}\operatorname{cosec}^2\alpha$.

**1207.** $\dfrac{R}{2}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}^2\dfrac{\alpha}{4}}$.

**1208.** $V_т = \dfrac{9}{2}\pi a^3$.

**1209.** $V_т = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \sin^3\dfrac{\beta}{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\beta}{2}\right)$.

**1210.** $V_с = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \sin^2\dfrac{\alpha}{4}$.

**1211.** $S_n = 4\pi R^2 \cos\dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\sin\dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$.

**1212.** $\alpha = 2\arccos\dfrac{1 + \sqrt{17}}{8}$.

**1216.** $V_т = \dfrac{7\pi a^3}{4}\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{180°}{7}\right)$.

**1217.** $\alpha = 2\arccos\dfrac{R}{h + R}$.

## § 21. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

**1219.** Обозначим площади треугольников $ABC$, $AOB$, $BOC$ и $AOC$ (рис. 92) соответственно через $S$, $S_1$, $S_2$ и $S_3$.

Находим: $S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{c \cdot t_c}{2} + \frac{a \cdot t_a}{2} + \frac{b \cdot t_b}{2}$,

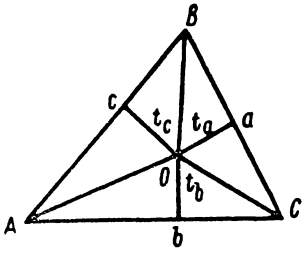



Рис. 92.

т. е. $\frac{a \cdot t_a}{2S} + \frac{b \cdot t_b}{2S} + \frac{c \cdot t_c}{2S} = 1.$ (1)

Но $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$,

откуда

$$\frac{a}{2S} = \frac{1}{h_a}; \quad \frac{b}{2S} = \frac{1}{h_b}; \quad \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_c}. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) находим требуемое равенство, что и требовалось доказать.

**1221.** Обозначим стороны четырехугольника соответственно через $a$, $b$, $c$ и $d$. По условию в четырехугольник можно вписать окружность, поэтому $a + c = b + d$.

Кроме того, $p - c = a$; $p - d = b$; $p - a = c$; $p - b = d$, где $p$ — полупериметр. Площадь вписанного четырехугольника

$$S_a = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

После очевидных преобразований находим: $S = \sqrt{abcd}$, что и требовалось доказать.

**1224.** Из рис. 93 находим: $\triangle AMF \sim \triangle DMC \sim \triangle BHN$,

поэтому $$\frac{AF}{CD} = \frac{MA}{MC} \qquad (1)$$

и $$\frac{CD}{NB} = \frac{MC}{MB}. \qquad (2)$$

Но квадрат касательной равен произведению всей секущей на ее внешнюю часть, т. е.

$$MC^2 = MA \cdot MB,$$

или

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB}. \qquad (3)$$

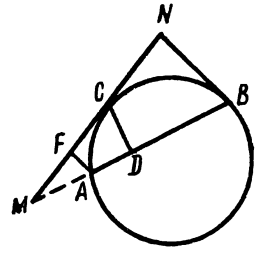



Рис. 93.

Из соотношений (1), (2) и (3) находим:

$$\frac{AF}{CD} = \frac{CD}{NB},$$

что и требовалось доказать.

**1225.** На рис. 94 $AC$, $AB$, $AD$, $BD$ $CF$ — хорды и $AF$ — диаметр. Угол $AED$ — прямой по условию, угол $ACF$ — прямой по построению. Кроме того, $\angle ADC = \angle AFC$ (измеряются одной и той же дугой),

поэтому в треугольниках $AFC$ и $ADE$ $\angle CAF = \angle EAD$, следовательно, $CF = BD$.

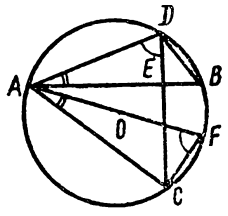


Рис. 94.

Имеем:

$$DE^2 + BE^2 = BD^2 = CF^2; \quad (1)$$
$$AE^2 + EC^2 = AC^2; \quad (2)$$
$$AC^2 + CF^2 = AF^2, \quad (3)$$

откуда из соотношений (1), (2) и (3) получим:

$$DE^2 + EC^2 + AE^2 + BE^2 = AF^2,$$

что и требовалось доказать.

**1228.** Объем чашки $V_ч = \frac{2}{3}\pi R^3$, где $R$ — радиус шара. Если наклонить чашку на 45°, то вода останется в сегменте, объем которого

$$V_c = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h),$$

а высота $h = R - \frac{R}{\sqrt{2}}$, поэтому $V_c = \frac{\pi R^3}{12}(3 - 2\sqrt{2})(4 + \sqrt{2})$.

Следовательно, $\frac{V_c}{V_ч} \cdot 100 = 11\frac{5}{8}\%$, что и требовалось доказать.

**1229.** $R\left(1 - \frac{2n}{m+n}\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)$. **1230.** $\frac{2\pi R^2 h}{R+h}$.

**1231.** У к а з а н и е. Доказать методом математической индукции.

**1235.** $S_n = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x + i\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$.

**1237.** Имеем:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}} = 2\sin\frac{\alpha}{2^n}\cos\frac{\alpha}{2^n}$$

$$\sin\alpha = 2^n\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}\sin\frac{\alpha}{2^n},$$

откуда $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n} = \dfrac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}$.

Но

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\sin\frac{\alpha}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}}\cdot\alpha = \alpha,$$

следовательно, предел искомого выражения равен $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

**Ответ.** $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

# Часть IV

# ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ И ПИСЬМЕННЫЕ РАБОТЫ, ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

## § 22. ЗАДАЧИ, ТЕОРЕМЫ И ВОПРОСЫ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ НА УСТНЫХ ЭКЗАМЕНАХ

**1244.** $a \cdot 1 = \frac{a}{1}$ и др. **1245.** $\frac{1}{1} = \frac{1+a}{1+a} = 1.$

**1246.** Через 24 года (23,5). **1278.** 145.

**1279.** Возвышение в степень.

**1280.** Указание.

$$\sqrt[3]{1} = x, \quad x^3 - 1 = 0, \qquad x_1 = 1, \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0,$$

**1281** Имеем: $2^{3 \cdot \frac{1}{3} \log_2 124} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 124 \cdot 2 = 248.$

**Ответ.** 248.

**1288.** Указание. Разделить отрезок в крайнем и среднем отношении значит разделить $a$ на 2 части так, чтобы бóльшая часть была средней пропорциональной между всем отрезком и его меньшей частью, т. е. $a : x = x : (a - x)$, или $x^2 + ax - a^2 = 0$.

Положительный корень уравнения $x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$.

Построение найденного отрезка можно выполнить разными способами, например, так: построить прямоугольный треугольник $ABC$, катет $AB$ которого равен $a$, а катет $BC$ равен $2a$; если провести биссектрису $AD$, то $BD$, равное $x$, и есть искомый отрезок, так как

$$AC = a\sqrt{5}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}, \text{ или } \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{x}{2a-x},$$

откуда и определяется значение искомого отрезка.

**1293.** 10 *см*.

**1294.** $S = \frac{k^2 - c^2}{4}$.

**1295.** Если $m > n$, площадь треугольника увеличится в $\frac{m}{n}$ раз.

Если $m < n$, площадь треугольника уменьшится в $\frac{m}{n}$ раз.

**1296.** $\frac{S^2}{8}(3 - 2\sqrt{2})$.

**1298.** 3; 6 или 4; 4.

**1299.** Указание. Обозначая стороны искомого треугольника через $x$, $x+1$ и $x+2$, а площадь его через $x+3$, находим:

$$\sqrt{3(x+1)(x+3)(x+1)(x-1)} = 4(x+3),$$

или $3x^3 + 3x^2 - 19x - 51 = 0$, $(x-3)(3x^2 + 12x + 17) = 0$, откуда $x_1 = 3$ ($x_2$ и $x_3$ — комплексные).

**Ответ.** $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $S = 6$.

**1300.** $P = 2\sqrt{2S\sqrt{3}}$.

**1310.** 180°.

**1311.** 105°.

**1312.** $\sqrt{ab}$; $\frac{a+b}{2}$.

**1313.** $\frac{\pi l^2}{4(\pi+1)^2}$.

**1314.** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\pi R^2$.

**1316.** 5 *см*, 7 *см* и 9 *см*.

**1317.** $a\sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} + b\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$.

**1319.** $\frac{5}{6}a^3$.

**1320.** $\frac{a^3}{6}$.

**1321.** $\frac{Vm^3}{m^3+n^3+p^3}$; $\frac{Vn^3}{m^3+n^3+p^3}$; $\frac{Vp^3}{m^3+n^3+p^3}$.

**1322.** $12\sqrt{3}r^2$.

**1323.** $8R^2$.

**1324.** $\sqrt{3} : \sqrt{2}$.

**1326.** $\frac{\pi R^3}{8\sqrt{3}}$.

# ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

## АЛГЕБРА

### 1. Степени и корни

1. $(+a)^n = +a^n$;

2. $(-a)^n = \begin{cases} +a^n \text{ для } n \text{ четных;} \\ -a^n \text{ для } n \text{ нечетных;} \end{cases}$

3. $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$;

4. $a^n : a^k = a^{n-k}$;

5. $(a^k)^n = a^{kn}$;

6. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$;

7. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

8. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

9. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;

10. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

11. $a^0 = 1$, если $a \neq 0$,

12. $a^\infty = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 < a < 1, \\ \infty, \text{ если } a > 1 \text{ (условно).} \end{cases}$

### 2. Квадратные уравнения

1. $x^2 + px + q = 0$; $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (a \neq 0).$$

$$ax^2 + 2bx + c = 0; \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (a \neq 0).$$

2. Формулы Виета: $x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a}$; $x_1 x_2 = q = \frac{c}{a}$.

3. $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$;

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

## 3. Прогрессии

а) Арифметическая прогрессия.

1. Общий член арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d.$$

2. Сумма первых $n$ членов арифметической прогрессии

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)\,d}{2}\right]n,$$

где $d$ — разность прогрессии, $a_1$ — первый член прогрессии.

б) Геометрическая прогрессия.

1. Общий член геометрической прогрессии:

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

2. Сумма первых $n$ членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{u_1 - u_n q}{1-q} = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} = u_1 \frac{q^n - 1}{q-1},$$

где $q$ — знаменатель прогрессии ($q \neq 1$).

3. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{u_1}{1-q}$ (для бесконечно убывающей Г. П.).

## 4. Логарифмы

а) Если $y = a^x$, то $\log_a y = x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

Вообще справедливо тождество $a^{\log_a N} = N$, которым пользуются при различных преобразованиях алгебраических выражений.

Логарифмы, взятые по основанию 10, называются десятичными (бригговыми), а по основанию $e = 2{,}71828\ldots$ — натуральными (неперовыми) и обозначаются, соответственно, lg и ln.

Если за основание взято любое положительное число, то применяется символ log.

б) Теоремы логарифмирования.

1. $\log (a \cdot b) = \log a + \log b$.

2. $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$.

3. $\log a^n = n \log a$.

4. $\log \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n} \log a$.

в) Свойства логарифмов.

1. $\log_a 1 = 0$, так как $a^0 = 1$.

2. $\log_a a = 1$, так как $a^1 = a$.

3. $\log_a (+\infty) = +\infty$, так как $a^{+\infty} = +\infty$ (условная форма записи).

4. $\log_a 0 = -\infty$, так как $a^{-\infty} = 0$ (условная форма записи).

5. Логарифмы чисел бóльших единицы — положительные, а меньших единицы — отрицательные, т. е. $\log_a N \gtrless 0$, если $N \gtrless 1$.

6. Отрицательные числа при положительном основании вещественных логарифмов не имеют.

7. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$; $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

8. $\dfrac{\log_a N}{\log_a M} = \dfrac{\log_b N}{\log_b M}$. 9. $\log_a N = \log_{a^n} N^n$.

## 5. Соединения

а) Размещения:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)\ (n > m).$$

б) Перестановки:

$$P_n = A_n^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$$

в) Сочетания:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}.$$

Полезно запомнить следующие соотношения:

1. $C_n^m = C_n^{n-m} = \dfrac{P_n}{P_{n-m} \cdot P_m}$. 2. $C_n^0 = C_0^0 = 1$.

## 6. Бином Ньютона

а) Возведение биномов, или двучленов, в степень $n$ производят по формуле бинома Ньютона:

1. $$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^2x^{n-2} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k}a^kx^{n-k} + \cdots + a^n.$$

2. $$(x-a)^n = x^n - C_n^1 ax^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^k C_n^k a^k x^{n-k} + \cdots + (-1)^n a^n.$$

б) Главные свойства формулы бинома Ньютона:

1. Показатели степени $x$ убывают от $n$ до 0, а показатели степени $a$ возрастают от 0 до $n$, причем сумма показателей $x$ и $a$ в каждом члене разложения равна $n$.

2. Число всех членов разложения равно $n+1$.

3. Общий член разложения

$$T_{k+1} = (\pm 1)^k C_n^k a^k x^{n-k}.$$

4. Биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов разложения, равны между собой.

5. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах,

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

# ГЕОМЕТРИЯ

## 1. Треугольники

Обозначения: $a$, $b$, $c$ — стороны треугольника; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы; $h$ — высота; $P$, $2p$ — периметр.

1. Два треугольника равны, если:

$a = a_1$, $b = b_1$, $\gamma = \gamma_1$;

$c = c_1$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$;

$a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$.

2. Два треугольника подобны, если:

$\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$;

$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$, $\gamma = \gamma_1$;

$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$.

3. Метрические соотношения между элементами прямоугольного треугольника (рис. 1);

$\frac{a}{h} = \frac{h}{b'}$; $a^2 + b^2 = c^2$;

$\frac{c}{a} = \frac{a}{a'}$; $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'}{b'}$;

$\frac{c}{b} = \frac{b}{b'}$; $ab = ch$.

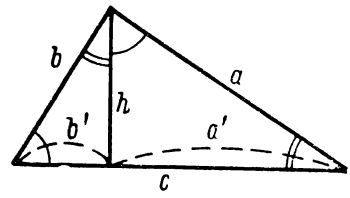



Рис. 1.

4. Метрические соотношения между элементами любого треугольника:

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'$; $\alpha < 90°$ (рис. 2, квадрат стороны против острого угла);

2) $a^2 = b^2 + c^2$; $\alpha = 90°$ (квадрат стороны против прямого угла);

3) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'$; $\alpha > 90°$ (рис. 3, квадрат стороны против тупого угла).

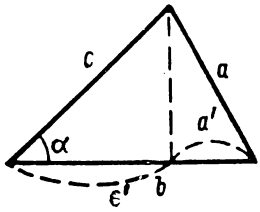



Рис. 2.

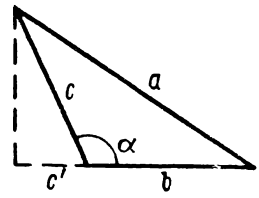



Рис. 3.

5. Пересекаются в одной точке: 1) три высоты треугольника; 2) три биссектрисы треугольника; 3) три медианы треугольника; 4) три перпендикуляра, восставленных из середин сторон треугольника.

Точка пересечения медиан находится на расстоянии одной трети каждой медианы от соответствующей стороны.

6. Высоты ($h$), медианы ($m$) и биссектрисы ($\beta$) в треугольниках вычисляются по формулам:

1) $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ...

2) $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, ...

3) $\beta_A = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$, ...

## 2. Окружность

1. Длина окружности $C = 2\pi r = \pi D$.

2. Длина дуги в $n^\circ$ $l = \frac{\pi R n}{180}$.

## 3. Правильные многоугольники

1. Выражение сторон ($a_n$) правильных многоугольников через радиус вписанной ($r$) и описанной ($R$) окружностей:

$$a_3 = 2r\sqrt{3} = R\sqrt{3} \approx 1{,}7321R; \qquad a_4 = 2r = R\sqrt{2} \approx 1{,}4142R;$$

$$a_5 = 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}; \quad a_6 = \frac{2}{3}r\sqrt{3} = R;$$

$$a_8 = 2r(\sqrt{2}-1) = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0{,}7654R;$$

$$a_{10} = \frac{2}{5}r\sqrt{5(5-2\sqrt{5})} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0{,}6180R;$$

$$a_{12} = 2r(2-\sqrt{3}) = R\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 0{,}5176R.$$

2. Формула удвоения числа сторон правильного вписанного многоугольника:

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

3. Зависимость между сторонами правильного вписанного ($a_n$) и сторонами правильного описанного ($b_n$) многоугольников; формулы их периметров:

$$a_n = \frac{b_n R}{\sqrt{R^2 + \frac{b_n^2}{4}}}; \qquad b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}};$$

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}; \quad b_n = 2R\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}; \quad p_n = na_n; \quad P_n = nb_n.$$

## 4. Измерение площадей

1. Площади прямоугольника и параллелограмма (рис. 4, 5):

$$S = ah;$$

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin \varphi;$$

$$S = ab \sin \alpha.$$

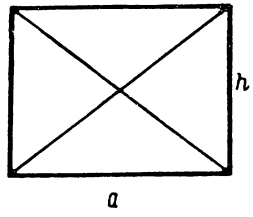



Рис. 4.

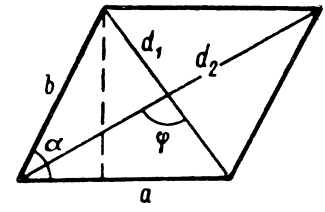



Рис. 5.

2. Площади квадрата и ромба (рис. 6, 7):

$$S = a^2; \; S = ah;$$

$$S = \frac{d^2}{2}; \quad S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2.$$

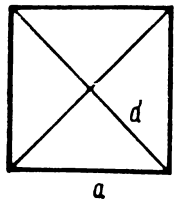



Рис. 6.

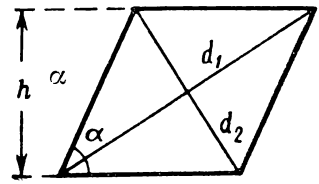



Рис 7.

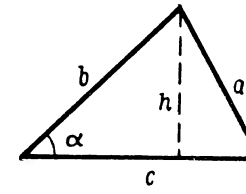



Рис. 8.

3. Площадь треугольника (рис. 8):

$$S = \frac{ch}{2};$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$S = pr;$$

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

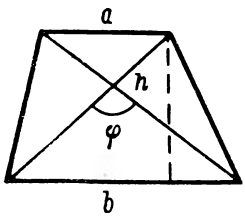


Рис. 9

4. Площадь трапеции (рис. 9):

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h;$$

$$S = m \cdot h, \text{ где } m = \frac{a+b}{2};$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \varphi.$$

5. Площадь вписанного четырехугольника:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p$ — полупериметр.

6. Площадь описанного многоугольника:

$$S = \frac{1}{2} P_n \cdot r,$$

где $P_n$ — периметр, $r$ — радиус вписанной окружности.

7. Площадь правильного вписанного многоугольника:

$$S = \frac{1}{2} p_n \cdot a,$$

где $p_n$ — периметр, $a$ — апофема.

8. Площадь круга:

$$S = \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi D^2.$$

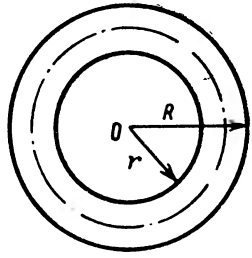


Рис. 10.

9. Площадь кольца (рис. 10):

$$S = \pi (R^2 - r^2) = \frac{1}{4} \pi (D^2 - d^2).$$

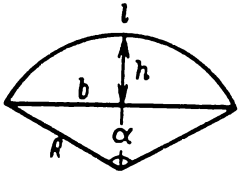


Рис. 11.

10. Площадь сектора (рис. 11):

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360};$$

$$S = \frac{1}{2} lR;$$

$$S = 0{,}0087 \alpha R^2;$$

$$S = \frac{1}{2} \varphi R^2,$$

где $l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$ — длина дуги;

$l = \varphi \cdot R$ — длина дуги;

$R = \dfrac{b^2 + 4h^2}{8h}$ — радиус круга;

$b = 2R \sin \dfrac{\alpha}{2}$ — длина хорды;

$h = 2R \sin^2 \dfrac{\alpha}{4}$ — длина стрелки;

$\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{4} = \dfrac{2h}{b}$;

$\alpha$ — градусная мера;
$\varphi$ — радианная мера центрального угла.

11. Площадь сегмента (см. рис. 11):

$$S \approx \frac{2}{3} bh.$$

12. Площади подобных фигур пропорциональны квадратам сходственных сторон.

## 5. Многогранники (поверхности и объемы)

Обозначения: $P$ и $Q$ — периметр и площадь оснований многогранников; $p$ и $q$ — периметр и площадь верхнего основания усеченной пирамиды; $p_\perp$ и $q_\perp$ — периметр и площадь перпендикулярных сечений наклонной призмы; $a$, $a_1$ и $H$, $h$ — апофемы и высоты правильной пирамиды и правильной усеченной пирамиды; $l$ — длина ребра наклонной призмы; $a$, $b$ и $c$ — измерения прямоугольного параллелепипеда.

1. Боковая поверхность прямой призмы: $S = PH$.
2. Боковая поверхность наклонной призмы: $S = P_\perp \cdot l$.
3. Объем прямой призмы: $V = QH$.
4. Объем наклонной призмы: $V = q_\perp \cdot l$; $V = QH$.
5. Полные поверхности и объемы параллелепипеда и куба:

$S_n = 2(ab + bc + ac)$; $S_k = 6a^2$. $V = abc$; $V_k = a^3$.

6. Боковая поверхность правильной пирамиды:

$$S = \frac{1}{2} Pa.$$

7. Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды:

$$S = \frac{1}{2} (P + p) a_1.$$

8. Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} QH.$$

9. Объем усеченной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} (Q + q + \sqrt{Qq}) \cdot h.$$

## 6. Правильные многогранники

Если $F$ — число граней, $S$ — число вершин и $A$ — число ребер выпуклого многогранника, то $F + S = A + 2$ (теорема Эйлера).

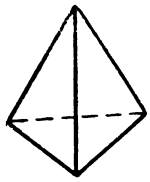


Рис. 12.

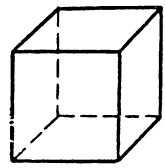


Рис. 13.

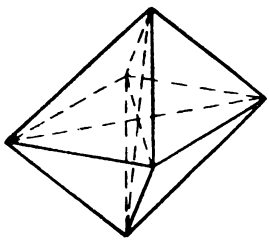


Рис. 14.

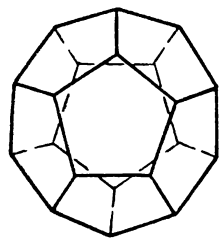


Рис. 15.

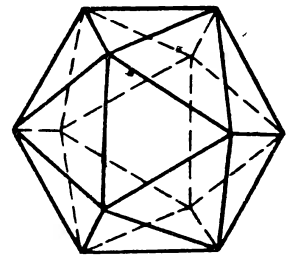


Рис. 16

**Элементы правильных многогранников**

| Наименование многогранника | Число граней $F$ | Число сторон у грани | Число вершин $S$ | Число ребер $A$ | Число ребер у вершины | Поверхность ($a$ — длина ребра) | Объем |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Тетраэдр (рис. 12) . . | 4 | 3 | 4 | 6 | 3 | $1{,}732a^2$ | $0{,}118a^3$ |
| Гексаэдр (рис. 13) . . | 6 | 4 | 8 | 12 | 3 | $6{,}000a^2$ | $1{,}000a^3$ |
| Октаэдр (рис. 14) . . | 8 | 3 | 6 | 12 | 4 | $3{,}464a^2$ | $0{,}471a^3$ |
| Додекаэдр (рис. 15) . . | 12 | 5 | 20 | 30 | 3 | $20{,}645a^2$ | $7{,}663a^3$ |
| Икосаэдр (рис. 16) . . | 20 | 3 | 12 | 30 | 5 | $8{,}660a^2$ | $2{,}181a^3$ |

## 7. Цилиндр (поверхности и объемы)

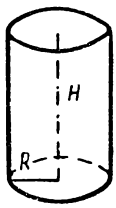



Рис. 17.

1. Боковая поверхность цилиндра (рис. 17):
$$S = 2\pi RH.$$
2. Полная поверхность цилиндра:
$$S = 2\pi R\,(H + R)$$
3. Объем цилиндра: $V = \pi R^2 H$.
4. Объем цилиндрической трубки:
$$V = \pi\,(R^2 - r^2)\,H.$$

## 8. Конус (поверхности и объемы)

1. Боковая поверхность конуса (рис. 18): $S = \pi Rl$, где $l$ — образующая конуса.

2. Полная поверхность конуса: $S = \pi R(l + R)$.

3. Объем конуса: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

4. Боковая поверхность усеченного конуса:

$$S = \pi (R + r) l_1.$$

5. Полная поверхность усеченного конуса:

$$S = \pi (R + r) l_1 + \pi R^2 + \pi r^2.$$

6. Объем усеченного конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi (R^2 + r^2 + Rr) h.$$

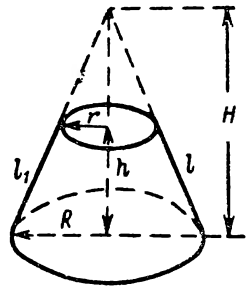



Рис. 18.

## 9. Шар и его части (поверхности и объемы)

1. Поверхность шара: $S = 4\pi R^2 = \pi D^2$.

2. Объем шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$.

3. Поверхность шарового сегмента и шарового пояса (рис. 19, 20):

$$S = 2\pi Rh.$$

4. Объем шарового сегмента (рис. 19):

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right), \quad \text{или} \quad V = \frac{1}{6}\pi h (h^2 + 3r^2).$$

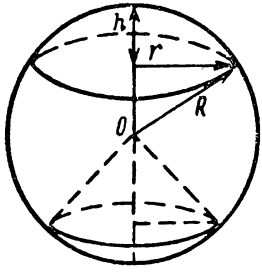



Рис. 19.

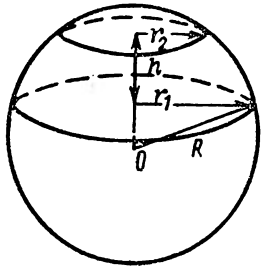



Рис. 20.

5. Объем шарового слоя (рис. 20): $V = \frac{1}{6}\pi h \left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right)$.

6. Объем шарового сектора (рис. 19): $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, где $h$ — высота шарового сегмента.

7. Поверхность полого шара: $S = 4\pi\left(R_1^2 + R_2^2\right)$,
где $R_1$ и $R_2$ — радиусы внешней и внутренней шаровых поверхностей.

8. Объем полого шара: $V = \frac{4}{3}\pi\left(R_1^3 - R_2^3\right)$.

### 10. Тор.

Объем тора: $V = 2\pi^2 Rr^2 = 19{,}739Rr^2$;
поверхность тора: $S = 4\pi^2 Rr = 39{,}478Rr$,
где $r$ — радиус круга вращения, $R$ — расстояние от центра круга до оси его вращения ($r < R$).

## ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

### 1. Измерение углов

1. 1 радиан $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ\ 17'\ 45''$;

2. $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0{,}01745$ радиана

### 2. Формулы перехода от градусных мер к радианным и обратно

1. $\varphi = \frac{\alpha}{180^\circ}\cdot\pi$; 2. $\alpha = \frac{\varphi}{\pi}\cdot 180^\circ$,

где $\varphi$ — радианная, $\alpha$ — градусная мера угла.

### 3. Соотношения между элементами прямоугольного треугольника

1. $\alpha + \beta = 90^\circ$;
2. $a = c\sin\alpha$;
3. $a = c\cos\beta = b\operatorname{tg}\alpha$;
4. $b = c\cos\alpha$;
5. $b = c\sin\beta = a\operatorname{tg}\beta$;
6. $c^2 = a^2 + b^2$.

### 4. Формулы для решения прямоугольных треугольников

| Случаи | Данные | Искомые | Решение |
|---|---|---|---|
| I | $c$, $\alpha$ | $\beta$, $a$, $b$ | $\beta = 90^\circ - \alpha$; $a = c\sin\alpha$; $b = c\cos\alpha$ |
| II | $a$, $\alpha$ | $\beta$, $b$, $c$ | $\beta = 90^\circ - \alpha$; $b = a\operatorname{ctg}\alpha$, $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ |
| III | $a$, $b$ | $\alpha$, $\beta$, $c$ | $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\beta = 90^\circ - \alpha$; $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ |
| IV | $a$, $c$ | $\alpha$, $\beta$, $b$ | $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\beta = 90^\circ - \alpha$; $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ |

## 5. Таблица знаков и некоторых значений тригонометрических функций

| Название функции | Четверти | | | | I | | | | II | III | | IV |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° | 360° |
| $\sin\alpha$ | + | + | − | − | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | −1 | 0 |
| $\cos\alpha$ | + | − | − | + | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | −1 | 0 | 1 |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | + | − | + | − | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\infty$ | 0 | $\infty$ | 0 |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | + | − | + | − | $\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\infty$ | 0 | $\infty$ |

## 6. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
2. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;
3. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;
4. $\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1$;
5. $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$;
6. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$;
7. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$;
8. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$.

## 7. Таблица значений тригонометрических функций

| Через функции | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha =$ | $\sin\alpha$ | $\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ | $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ | $\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ |
| $\cos\alpha =$ | $\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ | $\cos\alpha$ | $\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ | $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ |

Продолжение

| Через функции | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{tg}\alpha =$ | $\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ | $\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ |
| $\operatorname{ctg}\alpha =$ | $\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$ | $\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ | $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
| $\sec\alpha =$ | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ | $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ | $\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ | $\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$ |
| $\operatorname{cosec}\alpha =$ | $\dfrac{1}{\sin\alpha}$ | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ | $\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$ | $\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ |

## 8. Таблица формул приведения

| Функция \ Угол | $-\varphi$ | $90°\mp\alpha$ | $180°\mp\alpha$ | $270°\mp\alpha$ | $360°k\mp\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sin | $-\sin\varphi$ | $+\cos\alpha$ | $\pm\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\mp\sin\alpha$ |
| cos | $+\cos\varphi$ | $\pm\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\mp\sin\alpha$ | $+\cos\alpha$ |
| tg | $-\operatorname{tg}\varphi$ | $\pm\operatorname{ctg}\alpha$ | $\mp\operatorname{tg}\alpha$ | $\pm\operatorname{ctg}\alpha$ | $\mp\operatorname{tg}\alpha$ |
| ctg | $-\operatorname{ctg}\varphi$ | $\pm\operatorname{tg}\alpha$ | $\mp\operatorname{ctg}\alpha$ | $\pm\operatorname{tg}\alpha$ | $\mp\operatorname{ctg}\alpha$ |
| sec | $+\sec\varphi$ | $\pm\operatorname{cosec}\alpha$ | $-\sec\alpha$ | $\mp\operatorname{cosec}\alpha$ | $+\sec\alpha$ |
| cosec | $-\operatorname{cosec}\varphi$ | $+\sec\alpha$ | $\pm\operatorname{cosec}\alpha$ | $-\sec\alpha$ | $\mp\operatorname{cosec}\alpha$ |

## 9. Формулы сложения и вычитания аргумента

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$.
3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.
4. $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$.

## 10. Формулы умножения и деления аргумента

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
   $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

   $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$. $\qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$.

2. $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. $\qquad \cos\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

3. $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{2}$; $\qquad \sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$.

   $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2}$; $\qquad \cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$.

   $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$; $\qquad \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$.

4. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

## 11. Формулы преобразования алгебраических сумм тригонометрических функций в произведение и обратно

1. $$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

$$2.\ \cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha);$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha);$$

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right); \qquad 1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$1 \pm \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(45^\circ \pm \alpha)}{\cos 45^\circ \cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ \pm \alpha)}{\cos\alpha};$$

$$1 - \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}; \qquad 1 - \operatorname{ctg}^2\alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

$$3.\ \cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\{\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\};$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\};$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\}.$$

## 12. Формулы для вычисления элементов любого треугольника

Обозначения: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы треугольника, $a$, $b$, $c$ — стороны, $h$ — высота, $p$ — полупериметр, $S$ — площадь, $R$ и $r$ — радиусы описанного и вписанного кругов.

1. Теорема проекций:
$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$, $b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$, $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$.

2. Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

3. Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

4. Теорема тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}; \qquad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}};$$

. . . . . .

5. Формулы Мольвейде:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}};$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}};$$

. . . . . .

6. Тригонометрические функции половинных углов треугольника:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};\quad \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};\quad \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\frac{1}{p-a}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\frac{r}{p-a};\ \ldots$$

7. Формулы площади треугольника:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma;\quad S=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha};$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$S=\frac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\gamma};\quad S=p^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

8. Радиусы описанного и вписанного кругов

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{abc}{4S}=\frac{p}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}};$$

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

$$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

## 9. Решение косоугольных треугольников в общем виде

| Случаи | Данные | Искомые | Решение |
|---|---|---|---|
| I | $\alpha$<br>$\beta$<br>$\gamma$ | $\alpha$<br>$b$<br>$c$<br>$S$ | 1) $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$; 2) $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$;<br>3) $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$; 4) $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$. |
| II | $a$<br>$b$<br>$\gamma$ | $\alpha$<br>$\beta$<br>$c$<br>$S$ | 1) $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$; 2) $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$; 3) из 2-х ур-ний $\frac{\alpha + \beta}{2} = k$; $\frac{\alpha - \beta}{2} = k'$ находим $\alpha$ и $\beta$;<br>4) $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$; 5) $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$. |
| III | $a$<br>$b$<br>$c$ | $\alpha$<br>$\beta$<br>$\gamma$<br>$S$ | 1) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$;<br>2) $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$;<br>3) $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$;<br>4) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. |
| IV | $a$<br>$b$<br>$\alpha$ | $\beta$<br>$\gamma$<br>$c$<br>$S$ | 1) $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$; 2) $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$;<br>3) $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$; 4) $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$. |

Исследование 4-го случая:

если $a > b$, решение одно: $\beta < 90^\circ$;
если $a = b$, решение одно: $\beta = a$;
если $a < b$ и $a = b \sin \alpha$, решение одно: $\beta = 90^\circ$;
если $a < b$ и $a > b \sin \alpha$, решений два: $\beta_1 < 90^\circ$; $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$;
если $a < b$ и $a < b \sin \alpha$, решений нет.

## 13. Обратные тригонометрические функции

а) Определения:

1. Если $x = \sin y$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $y = \arcsin x$.
2. Если $x = \cos y$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$, то $y = \arccos x$.
3. Если $x = \operatorname{tg} y$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, то $y = \operatorname{arctg} x$.
4. Если $x = \operatorname{ctg} y$ и $0 < y < \pi$, то $y = \operatorname{arcctg} x$.

б) Выражение одних обратных тригонометрических функций через другие:

1. $$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} =$$
$$= \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = \frac{\pi}{2} - \arccos x \quad (0 < x < 1).$$

2. $$\arccos x = \arcsin \sqrt{1 - x^2} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} =$$
$$= \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \quad (0 < x < 1).$$

3. $$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} =$$
$$= \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x (x > 0).$$

4. $$\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} =$$
$$= \arccos \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \quad (x > 0,$$

## Литература

Адамар Ж., Элементарная геометрия, ч. 1 и 2, Учпедгиз, 1952.

Делоне Б. Н., Житомирский О. К., Задачник по геометрии, изд. 4-е, М.—Л., ОГИЗ-Гостехиздат, 1949.

Кречмар В. А., Задачник по алгебре, изд. 3-е, М., Физматгиз, 1959.

Маракуев Н. Н., Элементарная алгебра, т. 1 и 2, М., 1903.

Матвеев Н. М., Варианты письменных работ по математике, ЛГУ, 1965.

Новоселов С. И., Специальный курс тригонометрии, изд. 3-е, М., Изд-во «Советская наука», 1957.

Новоселов С. И., Специальный курс элементарной алгебры, изд. 5-е, М., Изд-во «Советская наука», 1958.

Попов Г. Н., Исторические задачи по элементарной математике, М.—Л., ГТТИ, 1932.

Радев А., Сборник по математике за кандидат-студенти, изд-во «Наука и изкуство», София, 1952.

Фадеев Д. К., Соминский И. С., Алгебра для самообразования, М., Физматгиз, 1960.

Шклярский Д. О. и др., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1954.

---

## Список учебных заведений, в которых предлагались задачи, помещенные в сборнике *

1 — Московский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. М. В. Ломоносова.
2 — Ленинградский ордена Ленина государственный университет им. А. А. Жданова.
3 — Харьковский государственный университет им. А. М. Горького.
4 — Киевский ордена Ленина государственный университет им. Т. Г. Шевченко.

---

* Список учебных заведений дан по наименованиям к 1963 г.

5 — Софийский государственный университет (Болгарская Народная Республика).
6 — Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина.
7 — Львовский политехнический институт.
8 — Киевский ордена Ленина политехнический институт.
9 — Уральский политехнический институт им. С. М. Кирова.
10 — Харьковский политехнический институт им. В. И. Ленина.
11 — Московский физико-технический институт.
12 — Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени технологический институт им. Ленсовета.
13 — Ленинградский институт водного транспорта.
14 — Ленинградский кораблестроительный институт.
15 — Ленинградский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горный институт им. Г. В. Плеханова.
16 — Ленинградский ордена Ленина институт инженеров железнодорожного транспорта им. акад. В. Н. Образцова.
17 — Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени инженерно-строительный институт.
18 — Ленинградский электротехнический институт связи им. М. А. Бонч-Бруевича.
19 — Ленинградский институт точной механики и оптики.
20 — Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина).
21 — Ленинградская ордена Ленина лесотехническая академия им. С. М. Кирова.
22 — Киевский инженерно-строительный институт.
23 — Московский архитектурный институт.
24 — Московское ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана.
25 — Московский электротехнический институт связи.
26 — Московский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени институт инженеров железнодорожного транспорта.
27 — Ростовский-на-Дону институт инженеров железнодорожного транспорта.
28 — Одесский институт инженеров морского флота.
29 — Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта.
30 — Ленинградский текстильный институт им. С. М. Кирова.
31 — Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена.
32 — Харьковский государственный педагогический институт физического воспитания им. Г. С. Сковороды.
33 — Пермский государственный педагогический институт.
34 — 1-й Ленинградский медицинский институт им. акад. И. П. Павлова.
35 — Северо-западный заочный политехнический институт.
36 — Военные учебные заведения.
37 — Средние школы и гимназии (экзамены на аттестат зрелости).
38 — Гимназии в странах народной демократии (экзамены на аттестат зрелости).
39 — Математические олимпиады.
40 — Математические кружки.
41 — Московский инженерно-физический институт.

42 — Московский авиационный технологический институт.
43 — Ленинградское высшее инженерное морское училище им. адмирала С. О. Макарова.
44 — Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского.
45 — Московский вечерний машиностроительный институт.
46 — Варшавский университет (Польская Народная Республика).
47 — Николаевский кораблестроительный институт им адмирала С. О. Макарова.
48 — Сибирский технологический институт.
49 — Московский технологический институт легкой промышленности.
50 — Томский государственный университет им. В. В. Куйбышева.
51 — Красноярский педагогический институт.
52 — Новосибирский государственный университет.

*КУЩЕНКО ВАСИЛИЙ СЕМЕНОВИЧ*
**СБОРНИК КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ С РЕШЕНИЯМИ**
*Издание пятое*
Рецензент доц., канд. физ.-мат. наук *А. М. Протасов*
Научный редактор *А. Б. Падво*
Редактор *Е. М. Пенова*
Переплет художника *В. У. Фонарева*
Технический редактор *Д. М. Крякова*
Корректоры: *В. М. Альфимова, Л. Н. Степнова*

Сдано в набор 13/VI 1968 г. М-11350. Подписано к печати 19/III 1969 г.
Формат издания 84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 16,0. Усл. печ. л. 26,88.
Уч.-изд. л. 25,6. Изд. № 2240-68. Тираж 500 000 экз. (VI завод 210 001—250 000).
**Цена 1 руб. 17 коп.**
Бумага типографская № 3. Заказ № 127.
Издательство «Судостроение», Ленинград, Д-65, ул. Гоголя, 8

Ленинградская типография № 6 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Ленинград, ул. Моисеенко, 10